Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE TÜBINGEN
K. KNOPP TÜBINGEN
R. NEVANLINNA HELSINKI
E. SCHMIDT BERLIN
F. K. SCHMIDT HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

66. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. FEBRUAR 1957)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

66. Band **Inhalt** 5. (Schluß-)Heft

Seite

Dinghas, A., Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität 389
Lingenberg, W., Zur Differentialgeometrie der Flächen, die eine eingliedrige projektive Gruppe in sich gestatten und über Allgemeine Projektivrotationsflächen 409
Carleson, L., Representations of continuous functions 447
Foster, A. L., The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras; subdirect factorization 452
Krickeberg, K., Stochastische Konvergenz von Semimartingalen 470
Bose, S. K., A note concerning some properties of the Maximum Function of a Meromorphic Function 487
Lomnicki, Z. A., and S. K. Zaremba, A further instance of the Central Limit Theorem for dependent random variables 490

DINGHAS, A.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 389—408 (1957)

Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität

Von
ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung

Sind z_1, z_2 zwei Punkte der vollen komplexen Ebene E, so soll der durch die Gleichung

$$(1.1) \qquad [z_1, z_2] = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad \left([z_1, \infty] = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\right)$$

definierte Ausdruck $[z_1, z_2]$ die OSTROWSKI-AHLFORSsche Entfernung von z_1 und z_2 heißen[1]).

Man betrachte eine in einem Gebiet G von E eindeutige reguläre Funktion $w(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = |z| e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ und nehme an, G besitze einen isolierten Randpunkt z_0. Läßt man dann den einfachen Fall eines Pols beiseite, so wird das Verhalten von $w(z)$ in jeder punktierten Kreisumgebung $K_\delta \subseteq G_\delta : 0 < [z, z_0] < \delta$ $(0 < \delta < 1)$ durch den klassischen Satz von CASORATI-WEIERSTRASS beherrscht[2]):

Satz 1. (CASORATI-WEIERSTRASS). *Es bedeute I_δ $(0 < \delta < 1)$ das Intervall $0 < r < \delta$. Man definiere dort bei gegebenem $a \in E$ die nichtnegative Funktion*

$$(1.2) \qquad \mu(r, a) = \operatorname{Min}\{[w(z), a] \,|\, [z, z_0] = r \in I_\delta\}.$$

Ist dann $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so ist für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ die Punktmenge

$$(1.3) \qquad \{r \,|\, \mu(r, a) < \varepsilon, r \in I_\delta\}$$

nicht leer.

[1]) Der Ausdruck $[z_1, z_2]$ wurde gelegentlich (vor OSTROWSKI und AHLFORS) auch von BIEBERBACH in seinem bekannten Lehrbuch der Funktionentheorie verwendet. Die systematische Verwendung von $[z_1, z_2]$ für Konvergenzfragen verdankt man OSTROWSKI [Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des PICARDschen Satzes, Math. Z. **24** (1926)] und später CARATHÉODORY (Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen, Math. Ann. **101**, S. 515—533). Zu voller Geltung bei Werteverteilungsfragen kommt der Kugelabstand $[z_1, z_2]$ erst durch die Arbeit von AHLFORS (Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Phys. math. Soc. Sci. fenn. **8**, Nr. 10) aus dem Jahre 1935.

[2]) In vielen Büchern (wie z. B. im Cours d'Analyse von PICARD und in den bekannten Büchern von BIEBERBACH und AHLFORS) wird dieser Satz bloß als Satz von WEIERSTRASS (Abh. Berl. Akad. Wiss. **1876**) bezeichnet. Den Namen CASORATI habe ich (bei flüchtigem Suchen) lediglich in dem bekannten Göschenbändchen von KNOPP und in dem neu erschienenen Buch von Herrn BEHNKE gefunden.

Dieser klassische Satz wurde durch PICARD folgendermaßen verschärft[3]).

Satz 2. (PICARD). *Es kann höchstens zwei $a \in E$ derart geben, daß*

$$\{r \mid \mu(r, a) = 0, r \in I_\delta\}$$

leer ist.

Während nun Satz 2 durch die insbesondere von R. NEVANLINNA eingeführten Begriffsbildungen neu bewiesen und weitgehend verschärft wurde, haben die im Laufe der Zeit entstandenen Methoden sicher auf die Beweise des Satzes 1, sowie auf eine Reihe von Sätzen der klassischen CAUCHY-RIEMANNschen Theorie wenig Anwendung gefunden. Die meisten Lehrbücher, auch die in der neuesten Zeit erschienenen, gehen kaum auf die NEVANLINNAsche Theorie ein und begnügen sich mit einigen Hinweisen auf das klassische Buch von R. NEVANLINNA. Wie wenig das gerechtfertigt ist, kann man ersehen, wenn man die Grundlagen der CAUCHYschen Theorie mit den Methoden von RIEMANN-NEVANLINNA konfrontiert. Man gewinnt dann nach einem Eindringen in die diesbezüglichen Begriffsbildungen bald den Eindruck, daß diese Theorie an den Anfang einer Vorlesung über Funktionentheorie gehört.

Im folgenden setze ich voraus, daß der Leser mit folgenden Tatsachen und Resultaten der NEVANLINNA-AHLFORSschen Theorie der meromorphen Funktionen vertraut ist.

Es sei $w(z)$ in $|z| < +\infty$ meromorph und es bezeichne $n(r, a)$ für jedes $a \in E$ die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ in $|z| \leq r$. Man setze

$$N(r, a) = \int_0^r \{n(t, a) - n(0, a)\} \frac{dt}{t} + n(0, a) \log r \tag{1.4}$$

und

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \log \frac{1}{[w, a]} d\varphi. \tag{1.5}$$

Man setze ferner

$$S(r, w) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| \leq r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\sigma \qquad (d\sigma = t\, dt\, d\varphi) \tag{1.6}$$

und

$$T(r, w) = \int_{0+}^r S(t, w) \frac{dt}{t}. \tag{1.7}$$

Dann gilt

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, w) + C(a) \tag{1.8}$$

mit einer von r unabhängigen endlichen Größe $C(a)$.

[3]) Für klassische Begriffsbildungen und für Methodisches soll hier ein für allemal auf das Standardwerk von R. NEVANLINNA (Eindeutige analytische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin 1954, 2. Aufl.) verwiesen werden, oder auf die in der Fußn. 1 zitierte klassische AHLFORSsche Arbeit.

2. Es gelte für eine in $|z|<+\infty$ meromorphe Funktion $w(z)$

$$T(r, w) = O(\log r); \tag{1.9}$$

dann ist $z=\infty$ eine Rationalitätsstelle für $w(z)$, und somit muß diese eine rationale Funktion sein. Legt man diese (elementaren) Tatsachen der NEVANLINNAschen Theorie der meromorphen Funktionen zugrunde, so kann man den CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz 1 fast ohne Rechnung in folgender scharfer Form beweisen:

Satz 3. *Ist $w=w(z)$ in $|z|<+\infty$ meromorph und $0<\alpha<1$, so kann die Menge*

$$\{r \mid \mu(r, a) < e^{-\alpha T(r, w)},\ a \in E \text{ fest}\} \tag{1.10}$$

keine endliche obere Schranke haben.

Beweis. Es sei angenommen, daß von einem $r=r_0$ an $\mu(r, a) \geqq e^{-\alpha T(r, w)}$ gilt. Dann gilt auch für $|z|=r \geqq r_0$

$$[w(z), a] \geqq e^{-\alpha T(r, w)} \tag{1.11}$$

und somit

$$m(r, a) \leqq \alpha\, T(r, w). \tag{1.12}$$

Nun kann wegen (1.11) $n(r, a)-n(0, a)$ nicht über $n(r_0, a)-n(0, a)$ wachsen. Somit wird $N(r, a)=O(\log r)$ und mit Rücksicht auf (1.8)

$$T(r, w) \leqq C \log r + \alpha\, T(r, w) \qquad (C>0, r>r_0). \tag{1.13}$$

Ist jetzt $z=\infty$ eine wesentliche Singularität, so gilt $\lim\limits_{r\to\infty}\{\log r : T(r, w)\}=0$. Daraus würde aber $1 \leqq \alpha$ folgen, was offensichtlich unmöglich ist.

Dieser Beweis wäre nun schön und einfach, wenn nicht unglücklicherweise die Gl. (1.9) lediglich mit Hilfe der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung bewiesen werden könnte. Es wird also zunächst notwendig sein, einen direkten Beweis von (1.9) zu geben und dann sowohl Satz 3 als auch andere später angeführte Sätze für solche analytischen Funktionen $w(z)$ zu beweisen, die in der Umgebung einer isolierten Singularität eindeutig sind. Was man noch mit der hier verwendeten Methode erreichen kann, wird der sachkundige Leser bald selbst beurteilen können. Hervorzuheben wäre hier an erster Stelle die konsequente Verwendung der lokalen Charakteristik, die das Verhalten von $w(z)$ in der Umgebung von z_0 bestimmt. Selbstverständlich vergesse ich in diesem Zusammenhang weder die Dissertation von GUNNAR AF HÄLLSTRÖM, noch andere dort angeführte (mir jedoch nicht zugänglich gewordene) Arbeiten[4]). Während aber dort mehr oder weniger mit einer globalen Wachstumscharakteristik gearbeitet wird, ermöglicht die lokale Charakteristik mit AHLFORSschen Methoden eine einfache Behandlung von Werte-

[4]) GUNNAR AF HÄLLSTRÖM: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzbereichen (Dissertation Universität Helsinki 1939).

verteilungsfragen von analytischen Funktionen, die in der Umgebung einer Stelle z_0 von meromorphem Charakter sind. Obwohl solche Fragen (nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn HÄLLSTRÖM) mit Hilfe der ursprünglichen Methoden von NEVANLINNA mehr oder weniger behandelt wurden, so habe ich mich angesichts eines Kunstgriffes, wodurch man die Bildung von Mittelwerten umgehen kann, entschlossen, den ganzen Fall kurz neu darzustellen. Das Hauptgewicht der Arbeit liegt aber auf dem CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz. Ich hoffe, hier gezeigt zu haben, wie die NEVANLINNA-AHLFORSschen Methoden, auf diesen Fragenkomplex angewandt, eine elegante und weitergehende Behandlung desselben gestatten.

2. Vorbereitende Tatsachen

Die Funktion $w = w(z)$ sei in einer Umgebung $K: 0 < [z, z_0] < \delta$ $(0 < \delta < 1)$ eindeutig und dort bis auf Pole regulär. Wir nehmen $z_0 = \infty$ an und ersetzen K etwa durch die Umgebung

$$|z| > M \qquad (M > 0) \tag{2.1}$$

von $z = \infty$. Es bedeute nun $R_{r|r_0}$ den Ring

$$r_0 \leqq |z| \leqq r \qquad (r_0 > M), \tag{2.2}$$

und allgemein $n(r|r_0, a)$ die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ innerhalb $R_{r|r_0}$. Sind dann a und b zwei beliebige, voneinander verschiedene komplexe Zahlen, so gilt, wie man leicht sieht,

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{[w,a]}{[w,b]}\,d\varphi - \frac{r_0}{2\pi}\int\limits_{|z|=r_0} \frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{[w,a]}{[w,b]}\,d\varphi = n(r|r_0,a) - n(r|r_0,b)^{5}).$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck

$$n(r|r_0,a) + \frac{r}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi - \frac{r_0}{2\pi}\int\limits_{|z|=r_0} \frac{\partial}{\partial|z|}\log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi,$$

unabhängig von a ist und eine lediglich von r_0, r und w abhängige Größe $S_0(r|r_0, w)$ [kurz $S_0(r|r_0)$] darstellt. Verwendet man hier die bekannte NEVANLINNA-AHLFORSsche Schmiegungsfunktion

$$m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \log\frac{1}{[w,a]}\,d\varphi, \tag{2.3}$$

so läßt sich dieser Sachverhalt durch die Gleichung

$$S_0(r|r_0,w) = n(r|r_0,a) + r\,m'(r,a) - r_0\,m'(r_0,a) \tag{2.4}$$

[5]) Diese Formel folgt aus einer von F. und R. NEVANLINNA bewiesenen allgemeinen GREENschen Transformationsformel [Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci. fenn. **50**, Nr. 5 (1922)], wenn man dort $\lambda = 1$ nimmt.

ausdrücken. Setzt man jetzt

$$T_0(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S_0(t|r_0, w)\,\frac{dt}{t}, \tag{2.5}$$

und

$$N(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} n(t|r_0, a)\,\frac{dt}{t}, \tag{2.6}$$

so wird

$$T_0(r|r_0, w) = N(r|r_0, a) + m(r, a) - A(r|r_0, a), \tag{2.7}$$

mit

$$A(r|r_0, a) = m(r_0, a) + r_0 \log\frac{r}{r_0}\cdot m'(r_0, a). \tag{2.8}$$

Aus der Relation (2.7) lassen sich eine Reihe von Folgerungen ableiten, welche Auskunft über das Verhalten von $w(z)$ in der Umgebung der wesentlichen isolierten Singularität $z_0 = \infty$ geben.

3. Erste Hilfssätze

Wir beweisen folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Es bezeichne kurz $r|r_0$ das Ringgebiet* (2.2) *und $d\sigma = |z|\,d|z|\,d\varphi$ das Flächenelement von E. Dann gibt es bei gegebenem $w(z)$ eine lediglich von r_0 abhängige Konstante A_0 derart, daß*

$$S_0(r|r_0, w) = \frac{1}{\pi}\int_{r|r_0} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\sigma + A_0 \tag{3.1}$$

wird.

Bezeichnet man hier das Integral rechts mit $S(r|r_0, w)$ [kürzer $S(r|r_0)$] und definiert die Funktion $T(r|r_0, w)$ durch die Gleichung

$$T(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S(t|r_0, w)\,\frac{dt}{t}, \tag{3.2}$$

so folgt aus (3.1)

$$T_0(r|r_0, w) = T(r|r_0, w) + A_0 \log\frac{r}{r_0}. \tag{3.3}$$

Die Funktion $T(r|r_0, w)$ [kürzer $T(r|r_0)$] soll die lokale Charakteristik von $w(z)$ in der Umgebung der wesentlichen Singularität $z_0 = \infty$ heißen. Nachfolgender Hilfssatz verallgemeinert den durch die Gl. (1.7) ausgedrückten Satz von NEVANLINNA:

Hilfssatz 2. *Ist*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r|r_0)}{\log r} < +\infty, \tag{3.4}$$

so ist $z = \infty$ eine Rationalitätsstelle von $w(z)$.

Ist also $z=\infty$ eine wesentliche Singularität für die Funktion $w(z)$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} S(r|r_0, w) = \infty. \tag{3.5}$$

Bevor der Beweis dieses Hilfssatzes erbracht wird, soll noch der Hilfssatz 3 formuliert werden:

Hilfssatz 3. *Es sei für ein* $a\in E$

$$\mu_0(r, a) = \operatorname*{Min}_{|z|=r}[w(z), a] \tag{3.6}$$

gesetzt. Dann gilt

$$S_0(r|r_0', w) = n(r|r_0, a) + \Theta\frac{L(r)}{\mu_0(r, a)} + C_0(a), \tag{3.7}$$

mit

$$L(r) = \int_{|z|=r} \frac{|dw|}{1+|w|^2}. \tag{3.8}$$

Hierbei bedeutet $L(r)$ die Länge derjenigen Kurve, die man aus der Kurve $w=w(z)$ $(|z|=r)$ durch stereographische Projektion auf die Oberfläche R der RIEMANNschen Kugel erhält. Die Größe $\Theta=\Theta(a)$ genügt (bei festem r_0) für jedes $a\in E$ der Ungleichung $0\leq|\Theta|\leq 1$. Ferner ist $C_0(a)$ eine endliche Konstante, sofern $w(z)$ auf $|z|=r_0$ regulär und von a verschieden ist.

Der Beweis des Hilfssatzes 1 erfolgt aus (2.7), wenn man diese mit dem Oberflächenelement $d\omega(a)=|a|d|a|d\alpha:(1+|a|^2)^2$ $(a\in E)$ von R multipliziert und anschließend über a integriert. Um zu zeigen, daß das Integrationsergebnis eine endliche Zahl ist, verfahren wir so: Zunächst gilt unabhängig vom Punkte w

$$\int_E \log\frac{1}{[w, a]}\, d\omega(a) = \frac{1}{2}\pi. \tag{3.9}$$

Jetzt betrachte man die Menge

$$C_0 = \{w|\, w = w(z), |z| = r_0\}, \tag{3.10}$$

und bilde die Menge $E_0=E-C_0$. Da C_0 offenbar das (sphärische) Maß Null hat, so gilt $\int_{E_0} d\omega(a)=\pi$, sobald das Integral links im LEBESGUEschen Sinne genommen wird. Man setze nun für jeden Punkt a von E_0

$$g(w, a) = \frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w, a]} \qquad (|z| = r_0). \tag{3.11}$$

Dann wird in 4. gezeigt werden: *Es gilt in jedem Punkt* $a\in E_0$

$$|g(w, a)| \leq \frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w, a]}. \tag{3.12}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung, dessen Beweis wir noch nachzuholen haben kann man zeigen, daß

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_{E_0} m'(r_0, a)\, d\omega(a)$$

existiert und eine endliche Zahl ist. Denn schreibt man I_0 in der Form

$$I_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{E_0} d\omega(a) \left\{ \int_0^{2\pi} g(w, a)\, d\varphi \right\}$$

und beachtet, daß wegen (3.12) und (3.9) das Integral $\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{E_0} |g(w, a)|\, d\omega(a) \right\}$ existiert und höchstens gleich $2\pi L(r_0) : r_0$ ist, so muß nach dem klassischen FUBINIschen Satz[6])

$$I_0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{E_0} g(w, a)\, d\omega(a) \right\} \tag{3.13}$$

gelten und somit I_0 endlich sein. Hierbei sind beide Integrale rechts im LEBESGUEschen Sinne zu nehmen. Verbindet man diese Überlegungen mit der Tatsache, daß

$$\int_{E_0} n(r|r_0, a)\, d\omega(a) = \int_E n(r|r_0, a)\, d\omega(a) = \int_{r|r_0} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, d\sigma$$

gilt, so folgt leicht aus (2.7) durch Integration über E_0

$$T_0(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} S(t|r_0) \frac{dt}{t} - r_0 I_0 \cdot \log \frac{r}{r_0}.$$

Schreibt man jetzt A_0 für $-r_0 I_0$, so hat man (3.3) und durch Differentiation nach r die Relation (3.1). Für die Größe A_0 gilt nach dem vorher Gesagten die Ungleichung $|A_0| \leq \frac{1}{\pi} L(r_0)$. Bevor wir nun zum Beweis der wichtigen Abschätzung (3.12) übergehen, soll noch der Hilfssatz 2 bewiesen werden.

Es sei zunächst (3.4) als richtig angenommen. Dann gilt auch

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r|r_0)}{\log r} = K_0 < +\infty. \tag{3.14}$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf (2.7) wegen $m(r, a) \geq 0$, daß für $a \in E$ ebenfalls

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r|r_0, a)}{\log r} \leq K < +\infty. \tag{3.15}$$

Es sei jetzt $r > r_1 > r_0$. Dann ist

$$n(r_1|r_0, a) \log \frac{r}{r_1} \leq \int_{r_1}^{r} n(t|r_0, a) \frac{dt}{t} \leq N(r|r_0, a),$$

und somit $n(r_1|r_0, a) \leq K$. Läßt man jetzt $r_1 \to \infty$ konvergieren, so erhält man $\lim_{r_1\to\infty} n(r_1|r_0, a) \leq K$: Das bedeutet: zu jedem $a \in E$ existiert ein $r_a^* = r(a)$

[6]) Man vgl. z. B. SAKS, S.: Theory of the Integral. Hafner Publishing Comp. (Kein Erscheinungsjahr!), S. 81.

derart, daß für $|z|>r_a^*$ die Funktion $w(z)\neq a$ ist. Man betrachte jetzt das Gebiet $R_1: r_1\leqq|z|\leqq r<+\infty$ mit $r_1>\operatorname{Max}\{r_0^*, r_\infty^*\}$ und halte r_1 fest. Die beiden Berandungen $|z|=r_1$ bzw. $|z|=r$ von R_1 mögen mit Γ_1 bzw. Γ bezeichnet werden. Dann gilt für eine in $|z|>r_0$ eindeutige reguläre Funktion $f(z)$

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}=2f(z).$$

Beide Integrale sind hier im positiven Sinne zu nehmen. Wendet man jetzt den Residuensatz auf die Funktion $f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}$ $(z\in R_1)$ an, so erhält man

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\frac{r^2+\bar{z}\zeta}{r^2-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}=0,$$

und somit wegen $\zeta\bar{\zeta}=r^2$ $(\zeta\in\Gamma)$ und $\zeta\bar{\zeta}=r_1^2$ $(\zeta\in\Gamma_1)$,

$$\overline{I_1(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{f(\zeta)}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\overline{f(\zeta)}\frac{r^2\zeta+r_1^2 z}{r^2\zeta-r_1^2 z}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Daraus folgt leicht

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Re\, f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\omega(f;z), \tag{3.16}$$

mit

$$\omega(f;z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_1}\left\{f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\overline{f(\zeta)}\frac{\zeta+z\varrho^2}{\zeta-z\varrho^2}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

und $\varrho=r_1:r$.

Man nehme jetzt an, $w=w(z)$ sei in $r_0\leqq|z|<+\infty$ regulär und habe dort keine Nullstellen. Dann gibt es eine ganze Zahl k_0 derart, daß jeder Zweig der Funktion $g(z)=\log w(z)-k_0\log z$, eine in R_1 reguläre eindeutige Funktion ist. Aus (3.16) folgt dann für ein $z\in R_1$

$$\log\frac{|w|}{|z|^{k_0}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{|w|}{|\zeta|^{k_0}}Re\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\}d\varphi-Re\,\omega(g;z), \tag{3.17}$$

oder noch wegen $Re\left\{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right\}>0$ und $\log|w|\leqq\log\sqrt{1+|w|^2}$,

$$\log|w|\leqq|k_0|\log\frac{r}{|z|}+\frac{r+|z|}{r-|z|}m(r,\infty)+|\omega(g;z)|. \tag{3.18}$$

Man nehme jetzt $r=2|z|$ und berücksichtige die Ungleichung $m(r,\infty)\leqq T(r|r_0)+K_1\log r$ mit $K_1>0$. Dann wird mit einem $m>0$

$$\log|w(z)|\leqq m\log|z|+|\omega(g;z)|,$$

also

$$|w(z)|\leqq|z|^m e^{|\omega(g;z)|}. \tag{3.19}$$

Diese Ungleichung beweist die Behauptung. Denn läßt man $|z| \to \infty$ konvergieren, so bleibt $|\omega(g; z)|$ beschränkt.

Nun gilt in $|z| > M$ die LAURENT-Darstellung

$$w(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{3.20}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} w(\zeta)\, \zeta^{-n} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (r > |z|).$$

Verwendet man hier (3.19), so stellt man durch den Übergang $r \to \infty$ leicht fest, daß von einem $n \geqq n_0$ an alle a_n verschwinden müssen. Somit kann $z = \infty$ keine wesentliche Singularität sein.

Der Hilfssatz 2 erlaubt nun den (großen) CASORATI-WEIERSTRASSschen Satz in folgender scharfer Form zu beweisen.

Satz 4. *Ist $w = w(z)$ eine in $r_0 < |z| < +\infty$ eindeutige und, mit Ausnahme von Polen, reguläre Funktion, so kann für jedes α $(0 < \alpha < 1)$ die Menge*

$$\{r \,|\, [w(z), a] < e^{-\alpha T(r|r_0, w)},\ r = |z| > r_0\}$$

keine endliche obere Schranke haben.

Der Beweis läuft genau wie der entsprechende Beweis von Satz 3. Hätte nämlich diese r-Menge eine endliche obere Schranke $r_1 > r_0$, so wäre $N(r|r_0, a)$ ein $O(\log r)$ und mithin, mit Rücksicht auf (2.7) und (3.3)

$$T(r|r_0, w) = m(r, a) + O(\log r).$$

Andererseits gilt für $r \geqq r_1$, $m(r, a) \leqq \alpha T(r|r_0, w)$, und somit muß $(1-\alpha)\, T(r, w) = O(\log r)$ sein. Danach kann $z = \infty$ höchstens ein Pol von $w(z)$ sein.

Bevor nun mit dem Beweis des Hilfssatzes 3 begonnen wird, sollen kurz folgende Bemerkungen hinzugefügt werden. Ist z_0 eine im endlichen liegende isolierte Singularität der eindeutigen Funktion $w = w(z)$, so führen die vorherigen Ausführungen, angewandt auf die Funktion $w\left(z_0 + \frac{1}{z}\right)$ $(|z| > M)$ zu folgendem Ergebnis:

Man definiere die Größe $m(r, z_0)$ für hinreichend kleines $|z - z_0| = r$, durch die Gleichung

$$m(r, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} \overset{+}{\log} |w(z)|\, d\varphi \qquad (z = z_0 + r e^{i\varphi}). \tag{3.21}$$

Ist dann $w(z)$ in einer punktierten Umgebung $0 < |z - z_0| < r_1$ regulär und gilt dort

$$m(r, z_0) = O\left(\log \frac{1}{r}\right), \tag{3.22}$$

so ist z_0 eine rationale Stelle von $w(z)$, also höchstens ein Pol. Diese Stelle ist eine hebbare, sobald an Stelle (3.22) die Gleichung $m(r, z_0) = O(1)$ gilt.

4. Beweis des Hilfssatzes 3

Wir setzen $w=u+iv$, $a=\alpha+i\beta$ mit reellen u, v, α, β und rechnen den Ausdruck $I=\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1}{[w,a]}$ aus, indem wir annehmen, daß a $(a\neq\infty)$ nicht auf der Punktmenge

$$C_0=\{w\,|\,w=w(z),\,|z|=r\} \tag{4.1}$$

liegt. Zunächst wird

$$I=\frac{uu_r+vv_r}{1+u^2+v^2}-\frac{(u-\alpha)u_r+(v-\beta)v_r}{(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2}.$$

Man setze jetzt

$$A=(1+|w|^2)\,|w-a|^2,$$

$$B=u\,|w-a|^2-(u-\alpha)\,|w|^2,$$

und

$$C=v\,|w-a|^2-(v-\beta)\,|w|^2.$$

Dann wird

$$I=-\frac{(u-\alpha)u_r+(v-\beta)v_r}{A}+\frac{Bu_r+Cv_r}{A}=A_1+A_2.$$

Mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung erhält man nun

$$|A_1|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,|w-a|}.$$

Ferner wird wegen $B^2+C^2=|w-a|^2|w|^2|a|^2$,

$$|A_2|\leq\frac{|w'|\,|w|\,|a|}{(1+|w|^2)\,|w-a|}, \tag{4.2}$$

und somit

$$|I|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}\,\frac{1+|w|\,|a|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|a|^2}}.$$

Da nun der letzte Faktor stets ≤ 1 ist, so wird schließlich

$$|I|\leq\frac{|w'|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}. \tag{4.3}$$

Hieraus folgt erstens der noch fehlende Beweis von (3.12) und zweitens die Ungleichung

$$r\,|m'(r,a)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|dw|}{(1+|w|^2)\,[w,a]} \tag{4.4}$$

für alle $a\notin C_0$.

Mit Hilfe dieser Abschätzung wird

$$|S(r\,|\,r_0,w)-n(r\,|\,r_0,a)|\leq C_0(a)+\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|dw|}{(1+|w|^2)\,[w,a]}. \tag{4.5}$$

Daß man aus dieser Ungleichung die Beziehung (3.7) ableiten kann, ist wohl trivial und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ist $a = \infty$, so ist $[w, \infty]^{-1} = |1 + |\overline{w}|^2$ und somit $|I|$ kleiner oder gleich als $[w, \infty]^{-1} \cdot |w'| : 1 + |w|^2$. Das beweist (4.4) für alle $a \in E$ [7]).

5. Vertiefungen des CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes

Ist $w(z)$ in der ganzen (offenen) z-Ebene meromorph, so liefert zunächst Hilfssatz 2 einen von der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung unabhängigen Beweis des durch 1 besprochenen NEVANLINNAschen Ergebnisses, wonach die Gl. (1.9) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß $w(z)$ eine rationale Funktion ist [8]). Wiederholt man jetzt die Rechnungen von 4, so erhält man die Abschätzung

$$|S(r, w) - n(r, a)| \leq \frac{L(r)}{\mu_0(r, a)}, \tag{5.1}$$

und zwar für alle r, für welche $w(z) \neq \infty$, $w(z) \neq a$ ($|z| = r$) ist. Mit Hilfe dieser Ungleichung kann man folgende Sätze beweisen, die in der Richtung des CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes liegen.

Satz 5. *Die Funktion $w = w(z)$ möge in der Umgebung jedes im Endlichen liegenden Punktes z von meromorphem Charakter sein. Man definiere $\mu_0 = \mu_0(r, a)$ durch die Gleichung*

$$\mu_0 = \operatorname*{Min}_{|z|=r} [w(z), a]. \tag{5.2}$$

Divergiert dann

$$\int^{\infty} \mu_0^2 \frac{dr}{r}, \tag{5.3}$$

so gilt

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, a)}{S(r, w)} \geq 1 \geq \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n(r, a)}{S(r, w)}. \tag{5.4}$$

Ferner gilt auf einer Menge Δ, die so beschaffen ist, daß $\int_{\Delta} \mu_0^2 \frac{dr}{r}$ divergiert,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, a)}{S(r, w)} = 1. \tag{5.5}$$

Eine andere Fassung des kleinen CASORATI-WEIERSTRASSschen Satzes wird durch nachstehenden Satz gegeben:

---

[7]) Eine weniger scharfe (und weniger geschickte) Abschätzung als die Abschätzungen (4.2) bzw. (4.4) habe ich zuerst in einer früheren Note [Zur Abschätzung der a-Stellen ganzer transzendenter Funktionen mit Hilfe der SHIMIZU-AHLFORSschen Charakteristik, Math. Ann. **120**, 581—584 (1945)] gegeben.

[8]) Den Beweis, daß für jede rationale Funktion $w(z)$, $T(r, w) = O(\log r)$ ist, findet der Leser bei NEVANLINNA, loc. cit. Fußnote 3.

Satz 6. *Ist*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,a)}{S(r,w)} < 1, \tag{5.6}$$

so ist das Integral (5.3) *konvergent*[9]).

Die Größe $\mu_0(r,a)$ kann man hier durch eine bessere ersetzen. Man definiere für alle r die Größe $\nu_0(r,a)$ durch die Gleichung

$$\nu_0(r,a) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \frac{d\varphi}{[w,a]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Dann gelten die Sätze 5 und 6 mit $\nu_0(r,a)$ statt $\mu_0(r,a)$. Diese Sätze nehmen für den allgemeinen Fall einer in der Umgebung von $z=\infty$ meromorphen Funktion $w(z)$ folgende Form an:

Satz 7. *Die Funktion $w=w(z)$ möge in der Umgebung $r_0 \leqq |z| < +\infty$ von $z=\infty$ regulär eindeutig und vom meromorphen Charakter sein. Divergiert dann für ein $a \in E$*

$$\int_{r_0}^{\infty} \nu_0(r,a)^2 \frac{dr}{r}, \tag{5.8}$$

so gilt

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} \leqq 1 \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)}. \tag{5.9}$$

Ferner gilt auf einer Menge Δ, die so beschaffen ist, daß (5.8), erstreckt über Δ, divergiert,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} = 1. \tag{5.10}$$

Satz 8. *Gilt unter denselben Bedingungen für $w(z)$*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)} < 1, \tag{5.11}$$

so ist (5.8) *konvergent.*

Wir beweisen lediglich die Sätze 7 und 8.

Es sei

$$I = \int_{|z|=r} \frac{|w'|}{1+|w|^2} \frac{|dz|}{[w,a]}. \tag{5.12}$$

Dann folgt daraus mit Rücksicht auf die SCHWARZsche Ungleichung

$$I^2 \leqq \frac{2\pi r^2}{\nu_0^2} \int_{|z|=r} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} d\varphi, \tag{5.13}$$

also wegen (3.1)

$$I^2 \leqq \frac{2\pi^2 r}{\nu_0^2} \frac{dS_0}{dr} \qquad (S_0 = S_0(r|r_0,w)). \tag{5.14}$$

[9]) Die Sätze 5 und 6 sind zuerst mit einem anderen Ausdruck an Stelle von $\mu_0(r,a)$ (mit $\mu_0(r,a) = \mathrm{Min}\{1, \mathrm{Min}\,|w(z)-a|\}$) in meiner in der Fußnote 7 zitierten Note bewiesen. Dort wird aber weder der Fall $a=\infty$ berührt, noch die invariante Form des Satzes bei Kugeldrehungen hervorgehoben.

Somit wird nach (4.4)

$$|S_0 - n(r|r_0, a)| \leq C_0(a) + \frac{\pi}{r_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.15}$$

Es bedeute jetzt I die Gesamtheit derjenigen Intervalle der Menge $r \geq r_0$, für die

$$\frac{1}{r_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}} > S_0^{\lambda} \qquad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$$

gilt. Dann ist

$$\int_I r_0^2 \frac{dr}{r} < \int_I \frac{dS_0}{S_0^{2\lambda}} < +\infty. \tag{5.16}$$

Ist also I' die zu I komplementäre Menge (in bezug auf die Menge $r \geq r_0$), so gilt

$$\frac{1}{r_0}\left\{r\frac{dS_0}{dr}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq S_0^{\lambda}$$

und somit dort

$$n(r|r_0, a) = S_0(r|r_0, w) + \pi\vartheta\, S_0^{\lambda}(r|r_0, w) \qquad (-1 \leq \vartheta \leq 1). \tag{5.17}$$

Aus dieser Gleichung können die Sätze 7 und 8 ohne Schwierigkeit abgeleitet werden.

Für den Satz 7 ist so zu schließen: Es sei

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r|r_0, a)}{S(r|r_0, w)} < 1. \tag{5.18}$$

Dann gilt von einem r an

$$n(r|r_0, a) \leq (1 - \delta)\, S(r|r_0, w) \qquad (0 < \delta < 1), \tag{5.19}$$

und dies widerspricht der Gl. (5.17). Die Beziehung (5.10) kann der Leser selbst beweisen. Analog schließt man für den Satz 8. Gilt (5.11), so kann offenbar (5.8) nicht divergieren. Sonst würde (5.9) gelten, deren rechte Seite zu (5.18) im Widerspruch steht.

6. Exkurs über den AHLFORSschen Gleichverteilungssatz in der Theorie der offenen Überlagerungsflächen

Die Abschätzung (4.4), angewandt auf eine in der ganzen (offenen) Ebene meromorphen Funktion $w(z)$, führt zu der Ungleichung

$$|S(r, w) - n(r, a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{|dw|}{(1 + |w|^2)\,[w, a]}, \tag{6.1}$$

sobald a der Menge (4.1) nicht angehört. Ist nun A eine beliebige, meßbare Teilmenge von E von positivem Maß, so kann man, indem man wieder in der in bezug auf (4.1) komplementären Menge E_0 operiert, und den FUBINIschen Satz (vorsichtig) anwendet, die Ungleichung

$$S(r, w) = \frac{1}{mA^*}\int_A n(r, a)\, d\omega(a) + \vartheta L(r) \tag{6.2}$$

beweisen, wobei $mA^* = \int_A d\omega(a)$ ist, und ϑ eine Konstante ist, deren absoluter Betrag höchstens $1 : mA^*$ werden kann. Beim Beweis von (6.2) ist derselbe Weg zu beschreiten, der in der ersten Hälfte von 3. für die Endlichkeit von I_0 eingeschlagen wurde. Die angegebene obere Grenze für ϑ erhält man aus der Ungleichung

$$\frac{1}{mA^*}\int_A \frac{d\omega(a)}{[w,a]} \leq \frac{1}{mA^*}\int_{E_0} \frac{d\omega(a)}{[w,a]} = \frac{2\pi}{mA^*}. \tag{6.3}$$

Die Deutung des Integrals links in (6.2) ist einfach und bekannt. Dieses liefert den Inhalt desjenigen Teiles, des (stereographisch auf R abgebildeten) durch die Funktion $w(z)$ erzeugten Flächenstückes

$$F_r : \{w \mid w = w(z),\ 0 \leq |z| \leq r\},$$

dessen Spurpunkte auf A fallen. Bekanntlich gilt

$$\int_A n(r,a)\, d\omega(a) = \int_{E_A} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, d\sigma, \tag{6.4}$$

wobei E_A die Menge

$$\{z \mid 0 \leq |z| \leq r,\ w(z) \in A\} \tag{6.5}$$

bedeutet.

Man setze nun allgemein für eine meßbare Menge A mit $mA^* > 0$

$$S(r,w,A) = \frac{1}{mA^*}\int_A n(r,a)\, d\omega(a). \tag{6.6}$$

Dann folgt aus (6.2) folgender Satz:

Satz 9. *Es seien A_1, A_2 zwei meßbare Teilmengen von E mit $mA_1^* > 0$, $mA_2^* > 0$. Dann gilt*

$$|S(r,w,A_1) - S(r,w,A_2)| \leq k\, L(r), \tag{6.6}$$

mit einer lediglich von mA_1^* und mA_2^* abhängigen, endlichen Konstante k.

Ist A ein Gebiet, so kann man mit AHLFORS[10]), der für diesen Fall (6.2) zuerst bewiesen hat, das Integral rechts in (6.2) in zwei Summanden zerlegen, die von dem Beitrag der sog. Zungen bzw. Inseln herrühren. Zu der ersten Gruppe der Blätter von F_r gehören bekanntlich alle solche (zusammenhängende) Blätterteile, deren Relativränder Spuren in A haben. Blätter, die in bezug auf A keinen Rand aufweisen, die sog. Inseln, liefern dann rechts in (6.2) einen ganzzahligen Betrag $n(r,A)$, der mit der Anzahl der über A liegenden Blätter der Insel zusammenfällt. Verwendet man für den Zungenbeitrag die Bezeichnung $m(r,A)$, so folgt aus (6.2) die AHLFORSsche Gleichung

$$m(r,A) + n(r,A) = S(r,w) + \vartheta L(r), \tag{6.7}$$

[10]) AHLFORS, L.: Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta math. **65**, 157—194 (1935).

welche die Gleichverteilung der Überdeckung von R durch die von $w(z)$ erzeugte RIEMANNsche Fläche zum Ausdruck bringt. Wir gehen darauf nicht näher ein.

7. Die NEVANLINNAsche Defektrelation

Es dürfte zum Schluß nicht ohne Interesse sein, die klassische NEVANLINNAsche Defektrelation mit Hilfe der lokalen Wachstumscharakteristik in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität z_0 (die wir ohne weiteres gleich ∞ annehmen können), aufzustellen. Wir benutzen dabei die Methode, die AHLFORS[11]) für den Fall einer meromorphen Funktion gegeben hat.

Es seien $a_1, \ldots, a_q$ $(q > 2,\ a_q = \infty)$ q voneinander verschiedene, feste komplexe Zahlen. Man setze

$$\varrho(a) = C\,\Pi^2 \log^{-2}\Pi \qquad \left(\Pi = \prod_1^q [a, a_k]^{-1}\right), \tag{7.1}$$

und wähle die Konstante $C = C(a_1, \ldots, a_q)$, so daß $\int_E \varrho(a)\, d\omega(a) = 1$ wird. Das Integral links ist hier als LEBESGUEsches Integral einer summierbaren Funktion aufzufassen.

Seine Existenz wird durch den Exponenten -2 beim Logarithmus gewährleistet. Es sei jetzt r_0 so groß gewählt, daß in $r_0 \leq |z| < +\infty$ keine wesentlichen Singularitäten von $w(z)$ liegen. Man kann auch ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß auf $|z| = r_0$, $w(z) \neq a_k$ $(k = 1, \ldots, q)$ ist. Es sei jetzt für $r_0 \leq r$

$$S_\varrho(r|r_0, w) = \int_{r|r_0} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\, \varrho(w)\, d\sigma \tag{7.2}$$

und

$$T_\varrho(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S_\varrho(t|r_0, w)\, \frac{dt}{t}. \tag{7.3}$$

Dann kann man die fundamentale Ungleichung von AHLFORS folgendermaßen verallgemeinern:

Hilfssatz 4. *Es existiert eine Konstante C_0 derart, daß*

$$T_\varrho(r|r_0, w) \leq T(r|r_0, w) + C_0 \log r \tag{7.4}$$

gilt.

Beweis. Man wähle für den Augenblick ein r_1 $(r_0 < r_1)$ derart, daß auf $|z| = r_1$ $w(z) \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ wird. Setzt man dann allgemein

$$I(r, w) = \int_E \varrho(a) \left\{ \int_{|z|=r} \log \frac{1}{[w, a]}\, d\varphi \right\} d\omega(a),$$

[11]) AHLFORS, L.: loc. cit. Fußnote 1.

so sind offenbar die Integrale $I(r_0, w)$ und $I(r_1, w)$ endlich. Sind nun diese beiden Integrale endlich, so folgt aus der Gl. (2.7), da $T_0(r_1|r_0, w) = T(r_1|r_0, w) + A_0 \log \frac{r_1}{r_0}$, also endlich ist und

$$\int_E N(r|r_0, a)\, \varrho(a)\, d\omega(a) = \int_{r|r_0} S_\varrho(t|r_0, w)\, \frac{dt}{t}, \tag{7.5}$$

daß

$$I_\varrho = \int_{E_0} \varrho(a)\, m'(r_0, a)\, d\omega(a) \tag{7.6}$$

ebenfalls endlich sein muß.

Das kann man auch direkt so zeigen, indem man (4.4) für $r = r_0$ zugrunde legt und beachtet, daß wegen

$$\operatorname{Min}_{|z|=r_0} [w, a_k] = \delta > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

das Integral

$$\int_E \varrho(a)\, \frac{d\omega(a)}{[w, a]}$$

endlich bleibt. Dabei ist dieses wieder als LEBESGUEsches Integral, wie in den früheren Fällen $\left(\varrho = \frac{1}{\pi}\right)$ zu nehmen.

Die Konstante I_ϱ hängt offenbar lediglich von $a_1, \ldots, a_q$ und den Werten der Funktion $w(z)$ auf $|z| = r_0$ ab und ist somit von dem speziellen Wert des Hilfswertes r_1 von r unabhängig. Wir haben also

$$T_0(r|r_0, w) \geq T_\varrho(r|r_0, w) - C_0 \log \frac{r}{r_0}, \tag{7.7}$$

und mit Rücksicht auf (3.3) von einem r an

$$T_\varrho(r|r_0, w) \leq T(r|r_0, w) + C_1 \log r, \tag{7.8}$$

mit $C_0,\ C_1 > 0$.

Mit Hilfe dieses Hilfssatzes kann jetzt die NEVANLINNAsche Defektrelation mit Hilfe der lokalen Charakteristik $T(r|r_0, w)$ leicht aufgestellt werden.

Es bezeichnen $n'(r|r_0, 0)$ bzw. $n'(r|r_0, \infty)$ die Anzahlen der Nullstellen bzw. Pole von $w'(z)$ in $r_0 \leq |z| \leq r$. Man setze

$$n_1(r|r_0) = n'(r|r_0, 0) - n'(r|r_0, \infty) + 2n(r|r_0, \infty)$$

und

$$\Phi = \Phi(r, \varphi) = \frac{|w'|}{1 + |w|^2} \sqrt{\varrho(w)} \log \Pi.$$

Ferner setze man

$$Q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \Phi\, d\varphi.$$

Dann wird

$$(q - 2)\, S_0(r|r_0, w) = \sum_1^q n(r|r_0, a_k) + n_1(r|r_0) = r\, Q'(r)\Big|_{r_0}^{r},$$

vorausgesetzt, daß auf $|z| = r$, $w(z) \neq a_k$ ist. Da $Q(r)$ für solche r noch stetig ist, kann man hier nach vorheriger Division durch r integrieren und man erhält mit Rücksicht auf (3.5)

$$(7.9) \qquad (q-2)\, T(r|r_0) = \sum_1^q N(r|r_0, a_k) - N_1(r|r_0) + Q(r) + O(\log r).$$

Dabei ist

$$N_1(r|r_0) = \int_{r_0}^{r} n_1(t|r_0)\, \frac{dt}{t}.$$

Wenn ich hier die klassische Abschätzung von AHLFORS für $Q(r)$ skizziere, so geschieht dies nur, um dem Leser das Nachschlagen jener Arbeit zu ersparen.

Zunächst wird

$$Q(r) \leqq \log \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{z=r} \frac{|w'|}{1+|w|^2}\, |\overline{\varrho(w)}\, d\varphi \right\} + q \log T(r|r_0) + O(\log r),$$

also mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung und mit Rücksicht auf den Hilfssatz 3

$$(7.10) \qquad Q(r) \leqq \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{S'_\varrho(r|r_0)}{2\pi r} \right\} + o\left(T(r|r_0)\right).$$

Die weitere Abschätzung kann auf Grund folgenden Hilfssatzes erbracht werden:

Hilfssatz 5. *Die Funktion $g(r)$ möge im Intervall*

$$(7.11) \qquad I_0 : r_0 \leqq r < +\infty$$

positiv, stetig und monoton wachsend sein. Ferner sei $g(r)$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich im Endlichen nicht häufen, differenzierbar. Dann ist das Maß der Menge

$$(7.12) \qquad E_r = \{x | g'(x) > g^2(x),\ r_0 \leqq x \leqq r\}$$

nach oben beschränkt.

In der Tat gilt

$$\int_{E_r} dx \leqq \int_{E_r} \frac{dg}{g^2} \leqq \frac{1}{g(r_0)} < +\infty.$$

Man führe jetzt für den Augenblick die Veränderliche $\xi = \log r$ ein und beachte, daß $r S'_\varrho(r|r_0) = \frac{d^2}{d\xi^2} T_\varrho(r|r_0)$ ist. Wendet man den vorigen Hilfssatz an, so sieht man leicht, daß die Doppelungleichung

$$(7.13) \qquad \frac{d^2}{d\xi^2} T_\varrho(r|r_0) \leqq \left(\frac{d}{d\xi} T_\varrho(r|r_0) \right)^2 \leqq T_\varrho(r|r_0)^4,$$

auf einer Teilmenge I_0^* von I_0 erfüllt sein muß, für die $\int_{I_0^*} dx$ unendlich ist. Hierdurch wird mit Rücksicht auf (7.10)

$$Q(r) \leq \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{T_\varrho(r|r_0)^4}{2\pi r^2} \right\} + o\left(T(r|r_0)\right),$$

für alle $r \in I_0^*$, und somit dort $Q(r) = o\left(T(r|r_0)\right)$. Es wird also

$$(q-2)\, T(r|r_0) \leq \sum_1^q N(r|r_0, a_k) - N_1(r|r_0) + o\left(T(r|r_0)\right), \tag{7.14}$$

sofern r in I_0^* liegt. Daß man die NEVANLINNAsche Defektrelation

$$\sum_1^q \delta(r_0|a_k) + \sum_1^q \vartheta(r_0|a_k) \leq 2, \tag{7.15}$$

mit

$$\delta(r_0|a_k) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r|r_0, a_k)}{T(r|r_0, w)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

und entsprechender Definition der Verzweigungsindizes $\vartheta(r_0|a_k)$ wie im klassischen Fall, ableiten kann, ist trivial und bedarf hier keiner Erläuterung.

Bevor ich diese Arbeit schließe, will ich noch kurz zeigen, wie man mit Hilfe der lokalen SHIMIZU-AHLFORSschen Charakteristik die NEVANLINNAsche Defektrelation (7.15) auf die nichtintegrierten Anzahlfunktionen $n(r|r_0, a_k)$ übertragen kann. Dabei folge ich einer Methode, die ich zuerst in einer vor einigen Jahren publizierten Note[12]) entwickelt habe.

Man kehre zu der nichtintegrierten Gl. (7.9) zurück und bezeichne jedes Mal mit $n_1(r|r_0, a_k)$ die Anzahl der a_k-Stellen von $w(z)$ innerhalb $R_{r|r_0}$, gezählt mit der um Eins verminderten Vielfachheit. Dann ist

$$n_1(r|r_0) \geq \sum_1^q n_1(r|r_0, a_k)$$

und somit wird zunächst

$$(q-2)\, S(r|r_0, w) - \sum_1^q \{n(r|r_0, a_k) - n_1(r|r_0, a_k)\} \leq r\, Q'|_{r_0}^r. \tag{7.16}$$

Es werde nun angenommen, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für alle genügend großen $r\,(r \geq r_1 > r_0)$, für die $Q'(r)$ existiert, die Ungleichung

$$r\, Q'(r) \geq \varepsilon\, S(r|r_0, w) \tag{7.17}$$

gilt. Dann würde daraus durch Integration von $r = r_1$ bis r die Ungleichung

$$Q(r) - Q(r_1) \geq \varepsilon \int_{r_1}^r S(t|r_0, w) \frac{dt}{t} \tag{7.18}$$

[12]) Zu NEVANLINNAS zweitem Fundamentalsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. (Annal. Acad. Sci. fenn., Ser. A, Nr. 151 **1953**, 8 S.)

folgen und somit, mit Rücksicht auf (7.10) von einem r an

$$\log\left\{\frac{S'_\varrho(r|r_0,w)}{2\pi r}\right\} \geq \varepsilon\, T(r|r_0,w) \quad (r \geq r_2 \geq r_1). \tag{7.19}$$

Daraus kann man aber wieder einen Widerspruch ableiten. In der Tat ist mit einem $C>0$

$$e^{\varepsilon T} \geq C_1 T^8 \qquad (T = T(r|r_0,w)),$$

und somit

$$T_\varrho(r|r_0,w) \geq C_1 \int_{r_2}^{r}\left\{\int_{r_2}^{t} T^8\, d\lambda\right\}\frac{dt}{t} + O(\log r).$$

Berücksichtigt man nun die Ungleichung (7.8) und beachtet man, daß bei geeignetem $C_2>0$ $\log r < C_2 T$ ist, so wird mit einem $C_3>0$

$$T(r|r_0,w) \geq C_3 \int_{r_2}^{r}\left\{\int_{r_2}^{t} T^8\, d\lambda\right\}\frac{dt}{t} = C_3 I(r). \tag{7.20}$$

Aus dieser Ungleichung folgt nun leicht

$$\frac{d^2 I}{d\xi^2} \geq C_4 I^8 \qquad (I = I(r)).$$

Dadurch sind wir in den Anwendungsbereich des Hilfssatzes 5 gelangt und haben zugleich die Existenz von mindestens einer Folge (r_n) $(r_n \to \infty,$ $n = 1, 2, \ldots)$ nachgewiesen, für die $r\,Q'(r) \leq \varepsilon\, S(r|r_0,w)$ gilt. Da nun $S(r|r_0,w) \to \infty$ konvergiert, erhält man

$$\lim_{r\to\infty}\left\{(q-2) - \sum_1^q \frac{n(r|r_0,a_k) - n_1(r|r_0,a_k)}{S(r|r_0,w)}\right\} \leq 0\ ^{13}),$$

oder

$$q-2 \leq \overline{\lim_{r\to\infty}}\left\{\sum_1^q \frac{n(r|r_0,a_k) - n_1(r|r_0,a_k)}{S(r|r_0,w)}\right\}.$$

Man definiere jetzt allgemein bei gegebenem $a \in E$ die (obere) Stellendichte $\delta_0(r_0|a)$ von a in der Umgebung $r_0 \leq |z| < +\infty$ von $z=\infty$ durch die Gleichung

$$\delta_0(r_0|a) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r|r_0,a) - n_1(r|r_0,a)}{S(r|r_0,w)}. \tag{7.21}$$

Danach wird der Zähler der rechten Seite dadurch gebildet, daß man lediglich die Stellen, wo $w(z)=a$ wird, in Betracht zieht, ohne die Vielfachheit der entsprechenden Wurzeln zu berücksichtigen. Es wird also

$$q-2 \leq \sum_1^q \delta_0(r_0|a_k),$$

[13]) Aus der Nichterfüllbarkeit von (7.17) kann nur geschlossen werden, daß die linke Seite hier höchstens Null sein kann. Denselben Schluß habe ich auch in der in [12]) erwähnten Note gezogen.

und somit kann der PICARD-NEVANLINNAsche Satz auch folgendermaßen formuliert werden:

Satz 10. (PICARD-NEVANLINNA). *Die Funktion $w = w(z)$ möge in der Umgebung $r_0 \leqq |z| < +\infty$ von $z = \infty$ von meromorphem Charakter sein. Ist dann $z = \infty$ eine wesentliche Singularität für $w(z)$, so gilt stets für q verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_q$ $(a_q = \infty, q \geqq 3)$*

$$\sum_1^q \delta_0(r_0 | a_k) \geqq q - 2. \tag{7.22}$$

Ist $r_0 = 0$ und somit $w(z)$ in der gesamten (offenen) Ebene meromorph, so geht (7.22) (und somit auch der ganze Satz 10) in den klassischen PICARD-NEVANLINNAschen Satz über.

Herrn GUNNAR HALLSTRÖM, der einen Teil des Manuskripts gelesen hat, habe ich für einige Bemerkungen zu danken. Ebenfalls Herrn K. HABETHA für Hilfe bei der Korrekturarbeit.

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität

(Eingegangen am 14. Juli 1956)

Lingenberg, W.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 409—446 (1957)

Zur Differentialgeometrie der Flächen, die eine eingliedrige projektive Gruppe in sich gestatten und über Allgemeine Projektivrotationsflächen *

Von

Walter Lingenberg

Einleitung 409
§ 1. Vorbemerkungen 411
§ 2. Integration der Ableitungsgleichungen 413
§ 3. Über die Bestimmung von Π-Flächen durch vorgegebene Eigenschaften 418
§ 4. Projektiv abwickelbare Π-Flächen 420
§ 5. Isotherm-asymptotische Π-Flächen 424
§ 6. Einige allgemeine Eigenschaften der APR-Flächen 427
§ 7. Flächen, deren kanonische Normalen durch zwei feste Geraden laufen 430
§ 8. Integration einer speziellen Picardschen Differentialgleichung 434
§ 9. Auf Projektivminimalflächen abwickelbare APR-Flächen 439

Einleitung

Die Flächen, die eine eingliedrige stetige Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten[1]), nennen wir hier, sofern sie keine Regelflächen sind, der Kürze halber *Π-Flächen*. Beispiele solcher Flächen sind: gewöhnliche und affine Rotationsflächen (mit Ausnahme von Affinsphären), Schraubenflächen und Spiralflächen. Diese Flächenklassen dienen bekanntlich oft dazu, sich Beispiele von Flächen mit vorgegebenen differentialgeometrischen Eigenschaften zu verschaffen, da statt der im allgemeinen bei solchen „Umkehrfragen" auftretenden partiellen Differentialgleichungen hier nur gewöhnliche Differentialgleichungen zu integrieren sind.

Es ist Aufgabe dieser Arbeit — ausgehend von einem Satz von Fubini — hierzu allgemein zu zeigen, wie man bei Π-Flächen Umkehrfragen auf die Integration einer, bzw. höchstens zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzieren kann, und diese Integration in einigen wichtigen Fällen auch soweit auszuführen, daß die Parameterdarstellung der gesuchten Flächen in geschlossener Form angegeben werden kann. Hierbei nehmen die Π-Flächen, bei denen die Bahnkurven der zugehörigen eingliedrigen Gruppen in den Ebenen eines Büschels liegen, eine Sonderstellung ein. Wir nennen diese

*) Die Arbeit ist aus der Inauguraldissertation (Kiel 1950) des Verfassers entstanden. Für die Anregung zur Beschäftigung mit dem Thema und stets bereitwilligst gewährte Hilfe ist der Verfasser Herrn Prof. K. H. Weise zu tiefstem Dank verpflichtet.

[1]) Diese Flächenklasse wurde besonders von Lie betrachtet. Vgl. [*13*]. (Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die entsprechenden Nummern des Literaturverzeichnisses am Schluß der Arbeit.)

Allgemeine Projektivrotationsflächen (APR-Flächen) und geben in einem besonderen Abschnitt Kennzeichnungen für sie an.

In der Behandlung der Parameterfrage ist die vorliegende Arbeit durchaus unorthodox. Die Resultate der projektiven Flächentheorie übernehmen wir in der Form, wie sie der von BOL für Asymptotenlinienparameter angegebene Kalkül der *halbinvarianten Differentiation* liefert[2]). Hierbei ergeben sich nämlich unter Verwendung des *Wilczynskischen Bezugssystemes* besonders einfache Kennzeichnungen einer ganzen Reihe von projektiv wichtigen Flächenklassen durch das Verschwinden gewisser Halbinvarianten. Dagegen benutzen wir für Integrationsprozesse ein Parameternetz, das konjugiert zu den Asymptotenlinien liegt und dessen eine Schar von Parameterlinien aus den Bahnkurven der zugehörigen eingliedrigen Gruppen besteht. Das ist für unsere Zwecke bequemer, als direkt die für allgemeine Parameter gültigen Formeln — etwa nach BOL [4] — auf die genannten konjugierten Parameter zu spezialisieren.

Kennt man ein vollständiges System von Halbinvarianten β, γ, l, m für eine Π-Fläche, so läßt sich (§ 2) die Integration des Systems der Ableitungsgleichungen außer bei APR-Flächen auf Quadraturen zurückführen. Bei den letzteren bleibt noch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung zu integrieren. Da die Π-Flächen von einer Funktion von einer Veränderlichen und den die eingliedrige Gruppe festlegenden Konstanten abhängen, kann man an das System der Halbinvarianten β, γ, l, m noch eine Forderung stellen. Das Problem, Π-Flächen zu bestimmen, die durch das Verschwinden einer Halbinvarianten gekennzeichnet sind, läßt sich dann (§ 3) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren, durch deren Integration man ein vollständiges System von Halbinvarianten β, γ, l, m der gesuchten Flächen bekommt.

In § 4 bestimmen wir die projektiv abwickelbaren Π-Flächen. In Erweiterung eines Resultates von BORŮVKA [6] zeigen wir, daß außer den sämtlich projektiv abwickelbaren APR-Flächen die auf Π-Flächen abwickelbaren Π-Flächen in geschlossener Form mit Hilfe der Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen angegeben werden können. Ferner existieren noch Π-Flächen, die auf die von ČECH [9] bestimmten Flächen mit einer eingliedrigen Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich abwickelbar sind. Als Spezialfall der — sämtlich projektiv abwickelbaren — isotherm-asymptotischen Π-Flächen werden in § 5 diejenigen projektiv transformierten eigentlichen Affinsphären angegeben, die mit ihrem metrischen Vorbild, der Kugel, auch die Eigenschaft gemein haben, durch die Transformationen einer wenigstens eingliedrigen Gruppe von projektiven Transformationen in sich überzugehen.

Der zweite Teil der Arbeit enthält die speziell auf APR-Flächen bezüglichen Resultate. In § 6 werden zunächst einige allgemeine Tatsachen über

[2]) BOL [2], [3]. Die Kenntnis dieser Arbeiten wird hier vorausgesetzt, insbesondere schließen wir uns den Bolschen Bezeichnungen an. Außerdem vgl. man BOL [4] und dort insbesondere S. 290ff.

die APR-Flächen, die aus den Ergebnissen des ersten Teils folgen, zusammengestellt. Sind speziell die Bahnkurven Kegelschnitte, so kommt man zu den von Süss [19] und Su [17] gekennzeichneten *Affinrotationsflächen* (AR-Flächen) und ihren Projektivtransformierten, den *Projektivrotationsflächen* (im engeren Sinne) (PR-Flächen), so daß diese Bezeichnungen auch vom gruppentheoretischen Standpunkt aus gerechtfertigt erscheinen. Umgekehrt ist jedoch die Süsssche Kennzeichnung der AR-Flächen durch ihre Affinnormalen nicht projektivinvariant. Hierzu zeigen wir aber in § 7, daß die PR-Flächen durch Forderungen an ihre projektiven Normalenkongruenzen definiert werden können: *Laufen sämtliche kanonischen Normalen erster und zweiter Art einer Fläche durch je eine feste Gerade, so ist diese eine PR-Fläche und umgekehrt.*

In den §§ 8, 9 werden Umkehrfragen für APR-Flächen behandelt. Es zeigt sich, daß die in einigen projektiv wichtigen Flächenklassen vorkommenden APR-Flächen einfache Parameterdarstellungen gestatten, die wieder außer elementaren Funktionen höchstens die Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen enthalten.

§ 1. Vorbemerkungen

Mit den Bezeichnungen wie bei Bol [3] sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ der Ortsvektor einer auf Asymptotenlinienparameter bezogenen Fläche im dreidimensionalen projektiven Raum mit homogenen Koordinaten, für den bei geeigneter Normierung die Ableitungsgleichungen[3])

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x}, \end{aligned} \right. \qquad \left(\mathfrak{x}_u \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} \text{ usw.}\right) \tag{1.1}$$

mit den Integrabilitätsbedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} 2\beta_v \gamma + \beta \gamma_v &= \gamma_{uu} + 2\chi_u, \\ \beta_u \gamma + 2\beta \gamma_u &= \beta_{vv} + 2\pi_v, \\ \pi_{vv} + \beta \chi_v + 2\beta_v \chi &= \chi_{uu} + \gamma \pi_u + 2\gamma_u \pi, \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

gelten.

Sind λ, μ gegebene *Grundhalbinvarianten* mit den Gewichten $(-1, a_0)$ bzw. $(b_0, -1)$, so sind nach Bol [3] § 75 die *halbinvarianten Ableitungen* einer Halbinvarianten A vom Gewicht (a, b) definiert durch

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= \lambda^{-a} \frac{\partial}{\partial u} (\lambda^a A) \equiv A_u + a \frac{\lambda_u}{\lambda} A, \\ A_2 &= \mu^{-b} \frac{\partial}{\partial v} (\mu^b A) \equiv A_v + b \frac{\mu_v}{\mu} A. \end{aligned} \right. \tag{1.3}$$

[3]) Bei Beschränkung auf das reelle Gebiet gelten die Formeln zunächst nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen, doch läßt sich diese Einschränkung für unsere Untersuchungen beseitigen.

Wir kennzeichnen halbinvariante Ableitungen durch angehängte fette Indizes. Speziell ist $\mathfrak{x}$ halbinvariant und man erhält mit Benutzung von (1) die halbinvarianten Ableitungsgleichungen (BOL [3] Formeln (76.12))

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_{11} = \beta \mathfrak{x}_2 + l\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{y} + p\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{21} = \mathfrak{y} + q\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} = \gamma \mathfrak{x}_1 + m\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{12}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{21})$ heißt erste Relativnormale der Fläche bezüglich der Grundhalbinvarianten λ, μ. $\mathfrak{y}$ sei auf der LIE-F_2 des Flächenpunktes gelegen. Im WILCZYNSKIschen System ($\lambda = \gamma, \mu = \beta$) ist dann nach BOL [3], Formeln (76.6), (118.4) und (118.6)

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} p = \frac{1}{2}\left(\beta\gamma - \left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)_v\right), \\ q = \frac{1}{2}\left(\beta\gamma - \left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)_u\right), \\ l = \pi + \frac{1}{2}\beta_v - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)_u - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)^2, \\ m = \chi + \frac{1}{2}\gamma_u - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)_v - \frac{1}{4}\left(\frac{\beta_v}{\beta}\right)^2. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen (2) lassen sich nun durch die Gleichungen

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{cases} p_1 = l_2 \\ q_2 = m_1 \\ \beta m_2 = \gamma l_1 \end{cases}$$

ersetzen.

Gibt man sich β, γ, π, χ bzw. β, γ, l, m als Funktionen von u und v vor und sind die Gln. (2) bzw. (6) befriedigt, so ist dadurch eine Fläche bis auf projektive Transformationen eindeutig festgelegt. Insbesondere erhält man eine Π-Fläche, wenn β, γ, l, m Lösungsfunktionen von (2) sind, die nur von $u+v$ abhängen, da dann die Abbildungen $\bar{u} = u + c$, $\bar{v} = v - c$ mit beliebigem, konstantem c der Fläche auf sich lediglich projektive Transformationen sein können.

Umgekehrt gilt der für unsere Betrachtungen grundlegende

Hauptsatz. *Gestattet eine auf Asymptotenlinienparameter bezogene Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, die keine Regelfläche ist, eine ein- oder zweigliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich, so läßt sich durch geeignete Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien erreichen, daß β, γ, π, χ bzw. β, γ, l, m nur von $u+v$ abhängen (oder Konstante sind). Die Parametertransformationen $\bar{u} = u + c$, $\bar{v} = v - c$ mit beliebigem c entsprechen dann den Transformationen der ein-*

gliedrigen Gruppe (bzw. einer eingliedrigen Untergruppe) und die Kurven $u+v=\text{const}$ *sind deren Bahnkurven auf der Fläche*[4]).

Gruppen, die höher als zweigliedrig sind, können nur bei Regelflächen auftreten — vgl. FUBINI [10] S. 32f.

§ 2. Integration der Ableitungsgleichungen

1. β, γ, l, m bilden ein vollständiges System von Halbinvarianten für die Fläche $\mathfrak{x}$ in dem Sinne, daß jede Halbinvariante auf der Fläche durch β, γ, l, m und deren halbinvariante Ableitungen ausgedrückt werden kann. Im Hinblick auf unsere Hauptfrage wollen wir nun eine Darstellung der Π-Flächen in Abhängigkeit von diesen Halbinvarianten angeben, d.h. wir wollen die Ableitungsgleichungen (1.1) integrieren[5]).

Dazu führen wir auf unserer Fläche konjugierte Parameter ein, und zwar soll die eine Schar von Parameterlinien aus Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe, die die Fläche in sich überführt und die andere Schar aus den zu diesen bezüglich der Asymptotenlinien konjugierten Kurven bestehen. Nach dem Hauptsatz aus § 1 kann die Skala auf den Asymptotenlinien bei den Π-Flächen so gewählt werden, daß β, γ, π, χ nur von $t=u+v$ abhängen. Die Kurven $t=\text{const}$ sind dann die genannten Bahnkurven und daher $s=u-v=\text{const}$ die zweite Schar unserer neuen Parameterlinien[6]). Aus (1.1) leitet man nun mit den Bezeichnungen

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \mathsf{B}=\beta+\gamma, & \Pi=\pi+\chi, & t=u+v, \\ \Gamma=\beta-\gamma, & \Phi=\pi-\chi, & s=u-v, \end{cases}$$

durch Addition und Subtraktion der beiden Gln. (1.1) das System[7])

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} 2\mathfrak{x}_{tt}+2\mathfrak{x}_{ss}=\mathsf{B}(t)\,\mathfrak{x}_t-\Gamma(t)\mathfrak{x}_s+\Pi(t)\,\mathfrak{x}, \\ 4\mathfrak{x}_{st}=\Gamma(t)\,\mathfrak{x}_t-\mathsf{B}(t)\,\mathfrak{x}_s+\Phi(t)\,\mathfrak{x}, \end{cases}$$

[4]) Der Beweis des Hauptsatzes ist in den Arbeiten von FUBINI [10] (§ 8, § 8^{bis}) und CECH [9] sowie in [11], Kap. 8 enthalten. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß die Annahme, die Asymptotenlinien seien Bahnkurven einer eingliedrigen, projektiven Gruppe auf der Fläche, zunächst zu der Folgerung führt, daß β, γ, l, m (eventuell nach Vertauschung von u und v) nur von u allein abhängen. Durch Ausnutzung der Integrabilitätsbedingungen ergibt sich dann, daß β, γ, l, m zu Konstanten gemacht werden können.

[5]) Irgendeine Parameterdarstellung der Π-Flächen anzugeben, bereitet keine Schwierigkeit, da man sich ja jede Π-Fläche aus einer (sogar ebenen) Kurve, die nicht Bahnkurve ist, durch Anwendung der Transformationen der eingliedrigen Gruppe erzeugt denken kann.

[6]) Unsere Parameter sind damit bis auf lineare Transformationen der Form $\bar{t}=at+b$, $\bar{s}=as+c$ (a, b, c bedeuten Konstante) festgelegt.

[7]) Zunächst galten unsere Betrachtungen nur für hyperbolisch gekrümmte Flächen. Wie man sich überlegt, erhält man aber elliptisch gekrümmte Flächen, wenn man bei reellem s die Größen t, B und Φ als rein imaginär, Γ und Π dagegen als reell annimmt.

und ebenso aus (1.2) die Integrabilitätsbedingungen

$$(2.3)\qquad \begin{cases} 4\Pi' + 2\mathsf{B}'' = 3(\mathsf{B}\mathsf{B}' - \Gamma\Gamma'), \\ 4\Phi' + 2\Gamma'' = \mathsf{B}'\Gamma - \mathsf{B}\Gamma', \\ 2\Phi'' + \Pi'\Gamma + 2\Pi\Gamma' - \Phi'\mathsf{B} - 2\Phi\mathsf{B}' = 0 \end{cases}$$

her (Striche bedeuten Differentiationen nach t).

2. Die Gln. (2) und (3) zusammen bilden nun ein vollständiges System von Differentialgleichungen. Um es zu integrieren, nutzen wir die Tatsache aus, daß die Kurven $t = \text{const}$ auf unseren Flächen jeweils Bahnkurven einer eingliedrigen stetigen Gruppe von projektiven Transformationen, also *W-Kurven*, sind und ihr Ortsvektor daher einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten genügt — vgl. z. B. BOL [3] § 51. Um diese Differentialgleichung aufzustellen, denke man sich (2) nur für eine Komponente z von $\mathfrak{x}$ angeschrieben. Man differenziere dann die erste Gl. (2) nach s, die zweite nach t, eliminiere zwischen beiden z_{stt} und mit Hilfe der beiden Gln. (2) selbst noch z_{tt} und z_{st}. Es ergibt sich mit Benutzung von (3)

$$(2.4)\qquad \begin{cases} z_{sss} = -\frac{1}{4}\Gamma z_{ss} + \frac{1}{16}(8\Pi + 4\mathsf{B}' + 2\Gamma^2 - 3\mathsf{B}^2) z_s + \\ + \frac{1}{16}(-4\Phi - 4\Gamma' + \mathsf{B}\Gamma) z_t + \frac{1}{16}(3\mathsf{B}\Phi - 2\Gamma\Pi + \mathsf{B}\Gamma' - \mathsf{B}'\Gamma + 2\Gamma'') z. \end{cases}$$

Differenziert man nochmals nach s und berücksichtigt (4) und (2), so folgt die gesuchte Differentialgleichung

$$(2.5)\qquad \begin{cases} z_{ssss} - \frac{1}{16}(8\Pi + 4\mathsf{B}' + 3\Gamma^2 - 3\mathsf{B}^2) z_{ss} \\ \quad - \frac{1}{32}(8\mathsf{B}\Phi - 8\Gamma\Pi + 4\Gamma'' + 4\mathsf{B}\Gamma' - 4\mathsf{B}'\Gamma + \Gamma\mathsf{B}^2 - \Gamma^3) z_s \\ \quad - \frac{1}{64}(-4\Phi^2 - 4\Gamma'\Phi + 2\Gamma^2\Pi - 2\mathsf{B}\Gamma\Phi - 2\Gamma\Gamma'' + \Gamma^2\mathsf{B}' - \mathsf{B}\Gamma\Gamma') z = 0. \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz aus § 1 entsprechen die Parametertransformationen $\bar{s} = s + 2c$ den Transformationen der eingliedrigen Gruppe, die die Kurven $t = \text{const}$ in sich überführen. Da in (5) kein Glied mit z_{sss} vorkommt, ist s ein normierter Parameter für die W-Kurven auf der Fläche (vgl. BOL [3] § 51, Aufg. 1). Da ferner die Bahnkurven einer festen eingliedrigen projektiven Gruppe untereinander projektiv sind, bleibt nur übrig, daß die Koeffizienten der Differentialgleichung (5) von t nicht abhängen. Sie müssen also Konstante sein. Es bestehen demnach die Gleichungen

$$(2.6)\qquad \begin{cases} 8\Pi + 4\mathsf{B}' + 3\Gamma^2 - 3\mathsf{B}^2 = 8c_1, \\ 8\mathsf{B}\Phi - 8\Gamma\Pi + 4\Gamma'' + 4\mathsf{B}\Gamma' - 4\mathsf{B}'\Gamma + \Gamma\mathsf{B}^2 - \Gamma^3 = 4c_2, \\ -4\Phi^2 - 4\Gamma'\Phi + 2\Gamma^2\Pi - 2\mathsf{B}\Gamma\Phi - 2\Gamma\Gamma'' + \Gamma^2\mathsf{B}' - \mathsf{B}\Gamma\Gamma' = -\frac{c_3}{8}, \end{cases}$$

die Integrale von (3) darstellen (die c_i seien stets reell).

3. Es läßt sich durch Differentiation sofort bestätigen, daß die Gln. (6) wirklich Integrale von (3) sind. Die ersten beiden Gleichungen lassen sich nach Π und Φ auflösen und damit Π und Φ aus der dritten eliminieren. Man

bekommt so unter Verwendung der Abkürzung

$$\Phi_1 = \frac{2\Gamma'' + \Gamma^3 - 4c_1\Gamma - 2c_2}{\mathsf{B}}. \tag{2.7}$$

(falls $\mathsf{B} = 0$, setze man $\Phi_1 = -4c_2$) das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \Pi = \frac{3}{8}(\mathsf{B}^2 - \Gamma^2) - \frac{1}{2}\mathsf{B}' + c_1, \\ \Phi = \frac{1}{4}(\mathsf{B}\Gamma - \Phi_1) - \frac{1}{2}\Gamma', \\ \Phi_1^2 = 4\Gamma'^2 + \Gamma^4 - 8c_1\Gamma^2 - 8c_2\Gamma + c_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Die beiden ersten Gleichungen geben Π, Φ als Funktionen von B, Γ, B', Γ', Γ''. Die dritte kann bei $\mathsf{B} \neq 0$ wegen (7) nach B aufgelöst werden. Gibt man sich dann Γ als Funktion von t vor, so können B, Φ, Π allein durch Einsetzen und Differenzieren bekannter Größen erhalten werden. Ist dagegen $\mathsf{B} = 0$, so läßt sich wegen $\Phi_1 = -4c_2$ aus der dritten Gl. (8) Γ berechnen.

Diese Gleichung vermittelt also einen Zusammenhang zwischen B und Γ, der, wie man sich leicht überzeugt (indem man sich zunächst etwa Φ_1 als Funktion von t vorgegeben denkt), nur dann nicht die eine der beiden Funktionen $\mathsf{B}(t)$, $\Gamma(t)$ aus der anderen bis auf Integrationskonstanten zu berechnen gestattet, wenn $\Gamma = k = \text{const}$ angenommen wird[8]). Im letztgenannten Fall bleibt $\mathsf{B}(t)$ willkürlich wählbar, sobald nur c_1 und c_2 so bestimmt werden, daß

$$k^3 - 4c_1 k - 2c_2 = 0 \tag{2.9}$$

ist. Diesem Fall entsprechen die APR-Flächen — man vgl. 5 und § 6ff.

4. Die Integration der Ableitungsgleichungen (2) ist nun sofort zu leisten. Mit (6) nimmt (5) die Form

$$z_{ssss} - \frac{c_1}{2} z_{ss} - \frac{c_2}{8} z_s + \frac{c_3}{256} z = 0 \tag{2.10}$$

an. Setzen wir zunächst voraus, daß die „charakteristische Gleichung"

$$\alpha^4 - \frac{c_1}{2}\alpha^2 - \frac{c_2}{8}\alpha + \frac{c_3}{256} = 0 \tag{2.11}$$

vier verschiedene Wurzeln α_i besitze, so folgt aus (10) der Lösungsansatz

$$z = \sum_{i=1}^{4} A_i(t)\, e^{\alpha_i s} \tag{2.12}$$

für (2). Geht man mit diesem Ansatz in die zweite Gl. (2) hinein, so erhält man, da die mit $e^{\alpha_i s}$ behafteten Glieder einzeln verschwinden müssen, zur Bestimmung der A_i die Gleichungen

$$(\Gamma - 4\alpha_i) A_i' + (\Phi - \alpha_i \mathsf{B}) A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.13}$$

und hieraus mit Benutzung von (8), falls $\Gamma - 4\alpha_i \not\equiv 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$\log A_i = \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B} \right) dt + a_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\ (a_i = \text{const}). \tag{2.14}$$

[8]) Diese Bedingung ist invariant nur bei den in Anmerkung 6 genannten Parametertransformationen.

Denkt man sich diese Werte für A_i in (12) eingetragen, so befriedigt z die zweite Gleichung des Systems (2). Da aber dieses z von vier Integrationskonstanten abhängt, muß es die erste Gl. (2) von selbst befriedigen, denn einerseits können bei den bisherigen Operationen keine regulären Lösungen verlorengegangen sein, andererseits lehrt die Theorie, daß jede Komponente des allgemeinen Integrals von (2) vier Integrationskonstanten enthält. Es darf sich also beim Einsetzen von (12) und (14) in (2_1) keine neue Bedingung ergeben, was man durch Nachrechnen sofort bestätigen kann. Damit hat man als allgemeine Lösung von (2)

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{4} \mathfrak{a}_i \, e^{\alpha_i s + \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B}\right) dt}$$

(die $\mathfrak{a}_i$ bedeuten konstante Vektoren). Nach einer projektiven Transformation nimmt die Parameterdarstellung der zugehörigen Flächen die Form

$$x_i = e^{\alpha_i s + \frac{1}{4}\int \left(\frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - \mathsf{B}\right) dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.15}$$

an. Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung nicht alle voneinander verschieden, so muß der Ansatz (12) in bekannter Weise modifiziert werden, da dann (12) nicht das allgemeine Integral von (10) darstellt. Die Integration bietet auch hier keine Schwierigkeiten, solange man die Voraussetzung $\Gamma - 4\alpha_i \not\equiv 0$ beibehält, so daß sich ein Eingehen auf diese Sonderfälle erübrigt. Es sei nur als Beispiel die Flächendarstellung für eine vierfache Wurzel $\alpha_i = \alpha_1 (= 0)$ angegeben. Mit den Abkürzungen

$$(*) \qquad I_k = \int \frac{\Phi_1 + 2\Gamma'}{(\Gamma - 4\alpha_i)^k}\, dt \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \qquad \log \varrho = -\frac{1}{4}\int \mathsf{B}\, dt$$

kann man erhalten $\left(\text{wir setzen } \frac{\partial^0}{\partial s^0} F \equiv F\right)$

$$x_i = \varrho \cdot e^{\frac{1}{4} I_1} \cdot \frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}} \left\{ \frac{1}{6} (s + I_2)^3 + 4 (s + I_2) I_3 + 16 I_4 \right\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

5. Das eben geschilderte Verfahren zur Bestimmung der $A_i(t)$ wird unanwendbar, wenn $\Gamma - 4\alpha_i = 0$ für ein α_i gilt. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen, daß $\Gamma = 4\alpha_3 = k = \text{const}$ ist. Da aus (8_3) mit (11) jetzt $\Phi_1 = 0$ folgt, ist die dritte der Gln. (13) identisch erfüllt und daher zur Bestimmung von $A_3(t)$ nicht brauchbar. Da dann nach (8) und (9) sowohl

$$\Phi_1^2 = k^4 - 8c_1 k^2 - 8c_2 k + c_3 = 0$$

als auch

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial k}\Phi_1^2 = k^3 - 4c_1 k - 2c_2 = 0$$

gilt, zeigt ein Vergleich mit (11), daß $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{k}{4}$ jetzt eine Doppelwurzel von (11) ist. Für die beiden anderen Wurzeln erhält man

$$\alpha_{1,2} = -\tfrac{1}{4} k \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} c_1 - \tfrac{1}{8} k^2}. \tag{2.16}$$

Nehmen wir an, daß $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$, so können wir zur Lösung von (2) statt (12) den Ansatz

$$z = \varrho\left[A_1(t)\, e^{\alpha_1 s} + A_2(t)\, e^{\alpha_2 s} + \{A_3(t) + s\, A_4(t)\}\, e^{\frac{1}{4} k s}\right] \tag{2.17}$$

machen. Dabei sei ϱ wie in (*) definiert. Durch Einsetzen in (2_2) ergeben sich zunächst die Bedingungen

$$A_1' = 0, \quad A_2' = 0, \quad A_4' = 0. \tag{2.18}$$

Geht man dann in (2_1) herein, so folgt wegen (18) und (16)

$$A_3'' - \mathsf{B}(t)\, A_3' + (\tfrac{3}{8} k^2 - \tfrac{1}{2} c_1)\, A_3 + k\, A_4 = (\tfrac{1}{2} c_1 - \tfrac{3}{8} k^2)\, s\, A_4. \tag{2.19}$$

Da $\alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha_3$, ist $\frac{1}{2} c_1 - \frac{3}{8} k^2 \neq 0$, so daß $A_4 = 0$ sein muß, denn linker Hand steht eine Funktion von t allein. Daher genügt A_3 der homogenen Differentialgleichung

$$A_3'' - \mathsf{B}(t)\, A_3' + c\, A_3 = 0, \tag{2.20}$$

wobei zur Abkürzung

$$c = \tfrac{3}{8} k^2 - \tfrac{1}{2} c_1 \tag{2.21}$$

gesetzt wurde. Da $c \neq 0$, ist die Gl. (20) nicht allgemein durch Quadraturen zu integrieren. Nehmen wir aber an, es seien $w_1(t)$ und $w_2(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (20), dann kann (17) die Form

$$z = \varrho\left[a_1 e^{\alpha_1 s} + a_2 e^{\alpha_2 s} + \{a_3 w_1(t) + a_4 w_2(t)\}\, e^{\frac{1}{4} k s}\right]$$

erhalten. (Die a_i bedeuten Integrationskonstanten.) Setzen wir noch

$$\log \bar{\varrho} = \tfrac{1}{4}\left[k s - \int \mathsf{B}(t)\, dt\right], \qquad \eta_\nu = \alpha_\nu - \tfrac{1}{4} k \qquad (\nu = 1, 2),$$

so kann die Darstellung der zugehörigen Flächen durch eine geeignete projektive Transformation auf die Form

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \bar{\varrho}\, e^{\eta_1 s}, \\ x_2 &= \bar{\varrho}\, e^{\eta_2 s}, \\ x_3 &= \bar{\varrho}\, w_1(t), \\ x_4 &= \bar{\varrho}\, w_2(t) \end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

gebracht werden.

Wir lassen nun sukzessive die Voraussetzungen $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$ fallen. Ist zunächst $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, so muß $k \neq 0$ und auch $c \neq 0$ sein, und man erhält statt (22) mit den gleichen Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \bar{\varrho}\, e^{-\frac{1}{2} k s}, \\ x_2 &= \bar{\varrho}\, s\, e^{-\frac{1}{2} k s}, \\ x_3 &= \bar{\varrho}\, w_1(t), \\ x_4 &= \bar{\varrho}\, w_2(t). \end{aligned}\right. \tag{2.23}$$

Ist dagegen $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$, so muß $c = 0$ sein. Je nachdem, ob dann $\alpha_1 \neq \alpha_2$ oder $\alpha_1 = \alpha_2$, erhält man

$$(2.24)\qquad \begin{cases} x_1 = \bar{\varrho}\,(s + k\,w_3(t)), \\ x_2 = \bar{\varrho}\,e^{-ks}, \\ x_3 = \bar{\varrho}\,w_2(t), \\ x_4 = \bar{\varrho}, \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad (2.25)\qquad \begin{cases} x_1 = \bar{\varrho}\,(\tfrac{1}{2}s^2 + w_3(t)), \\ x_2 = \bar{\varrho}\,s, \\ x_3 = \bar{\varrho}\,w_2(t), \\ x_4 = \bar{\varrho}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet w_2 eine nichtkonstante Lösung von (20) mit $c = 0$, während mit $w_3(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(2.26)\qquad A_3'' - \mathsf{B}(t)\,A_3' + 1 = 0$$

bezeichnet wurde. Denkt man sich in den Darstellungen (24), (25) $\bar{\varrho} = 1$ gesetzt, so erkennt man, daß diese Flächen Schiebflächen sind. Man sieht, daß sich bei diesen durch $c = 0$ gekennzeichneten Flächen die Differentialgleichungen (20) bzw. (26) durch Quadraturen integrieren lassen. Unsere bisherigen Resultate fassen wir nun zusammen in dem folgenden

Satz 1. *Aus dem vollständigen System von Halbinvarianten β, γ, l, m ist die Parameterdarstellung einer Π-Fläche mit $\Gamma \neq k$ durch Quadraturen herzuleiten. Bei den Π-Flächen mit $\Gamma = k$ (also den APR-Flächen — vgl. § 6) kommt man nur dann allgemein mit Quadraturen aus, wenn die betreffende Fläche überdies Projektivtransformierte einer Schiebfläche ist. Anderenfalls bleibt noch die Integration der homogenen linearen Differentialgleichung* (20) *zu leisten.*

§ 3. Über die Bestimmung von Π-Flächen durch vorgegebene Eigenschaften

1. Wir knüpfen wieder an § 1 an. Durch Vorgabe von β, γ, l, m ist eine Fläche bis auf projektive Transformationen bestimmt und jede weitere Halbinvariante H auf der Fläche läßt sich durch β, γ, l, m und deren halbinvariante Ableitungen ausdrücken:

$$(3.1)\qquad H = H(\beta, \gamma, l, m, \beta_1, \gamma_2, l_1, l_2, \ldots, m_{2\ldots 2}).$$

(Da wir das WILCZYNSKIsche System verwenden, ist $\beta_2 = \gamma_1 = 0$.) Das Verschwinden einer Halbinvarianten H ist eine Bedingung, die von der Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien nicht abhängt und daher geometrische Bedeutung haben wird. Insbesondere zeigt BOL [3], wie sich eine ganze Reihe von wichtigen Flächenklassen, z.B. die Komplexflächen, die Flächen von DEMOULIN, die Projektivminimalflächen u. a. durch das Verschwinden solcher Halbinvarianten einfach kennzeichnen lassen (man vgl. z.B. l. c. § 121). Hiervon kann man ausgehen, wenn man die Π-Flächen bestimmen will, die in einer dieser Flächenklassen enthalten sind.

Allgemein sind nämlich nach § 1 bei den Π-Flächen β, γ, l, m und wegen unserer Wahl der Grundhalbinvarianten auch alle ihre halbinvarianten Ableitungen Funktionen von $t = u + v$ allein. Daher kann eine Bedingung $H = 0$ bei den Π-Flächen als eine gewöhnliche Differentialgleichung für die unbe-

kannten Funktionen β, γ, l, m aufgefaßt werden, wenn man die halbinvarianten Ableitungen durch gewöhnliche ausdrückt. Zunächst können wir dann vermöge (1.5) und (2.1) l, m samt Ableitungen durch Π und Φ samt Ableitungen und diese mit Hilfe von (2.8) durch B und Γ nebst ihren Ableitungen ausdrücken. Da ferner $2\beta = \mathsf{B} + \Gamma$ und $2\gamma = \mathsf{B} - \Gamma$, läßt sich dann die Differentialgleichung $H = 0$ in der Form

$$H^*(\mathsf{B}, \Gamma, \mathsf{B}', \Gamma', \ldots, \mathsf{B}^{(\nu)}, \Gamma^{(\varrho)}) = 0 \tag{3.2}$$

schreiben. Wird nun Γ als nicht konstant und $\mathsf{B} \not\equiv 0$ angenommen, so kann man mit Hilfe der dritten Gl. (2.8) auch B nebst Ableitungen eliminieren und erhält so eine Differentialgleichung der Form

$$H^{**}(\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(\sigma)}) = 0. \tag{3.3}$$

Anderenfalls ist bei $\Gamma = k = \text{const}$ bereits (2) eine Differentialgleichung für die eine unbekannte Funktion $\mathsf{B}(t)$, und schließlich bleibt noch zu prüfen, ob die Annahme $\mathsf{B} \equiv 0$ zu weiteren Lösungen führt, was aber nach (2) und § 2, **3** höchstens eine Quadratur erfordert. Es gilt also

Satz 2. *Die Bestimmung eines vollständigen Systems von Halbinvarianten β, γ, l, m für Π-Flächen, die einer vorgeschriebenen halbinvarianten Bedingung*

$$H(\beta, \gamma, l, m, \beta_1, \ldots, m_{2\ldots 2}) = 0$$

genügen, erfordert höchstens die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren Ordnung $r+4$ nicht übersteigt, wenn H halbinvariante Ableitungen von β, γ, l, m bis höchstens zur r-ten Ordnung enthält.

Die letzte Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß β, γ als Funktionen von Γ als höchste die zweite Ableitung von Γ und l, m als höchste die zweite Ableitung von β, γ enthalten.

2. Es gibt also im allgemeinen in jeder Flächenklasse, die sich durch das Verschwinden nur einer Halbinvarianten kennzeichnen läßt, Π-Flächen. Zusammen mit Satz 1 liefert Satz 2 die Aussage, daß die Bestimmung der Parameterdarstellung solcher Flächen außer Quadraturen noch, falls $\Gamma \neq k$, die Integration einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung erfordert, und dazu, falls $\Gamma = k$, der homogenen linearen Gl. (2.20) [9]). Wir werden auf Grund dieses allgemeinen Ergebnisses die Bestimmung von Π-Flächen, die vorgegebene Eigenschaften haben, an einigen Beispielen vorführen, die auch an sich ein gewisses Interesse beanspruchen dürften. Zweckmäßig betrachtet man dabei die Flächen mit $\Gamma = k$ gesondert. Es stellt sich nämlich heraus, daß bei den letzteren die aus der Bedingung $H = 0$ entstehende Differentialgleichung in einfacheren Fällen meist in geschlossener Form integriert werden

[9]) Auch bei den Flächen mit $\Gamma = k$ genügt eine einzige Differentialgleichung, wenn man sich die gesuchten Flächen durch ihre „*Meridiankurven*" (s. § 6) charakterisiert denkt, wie vom Spezialfall der Rotationsflächen her bekannt ist. Praktisch läßt sich aber daraus meist kein Vorteil ziehen, da die betreffende Differentialgleichung sehr kompliziert wird. Man vgl. jedoch für einen Spezialfall CALUGAREANU [8].

kann, so daß hier die Hauptaufgabe in der Integration der linearen Differentialgleichung (2.20) besteht. Dagegen ist im Falle $\Gamma \neq k$ die Differentialgleichung $H = 0$ auch bei so einfachen Bedingungen wie z.B. $l = 0$ schon so kompliziert gebaut, daß man eine Integration in geschlossener Form kaum erhoffen kann.

3. An dieser Stelle möge noch eine Bemerkung über die eingliedrigen projektiven Gruppen, die Π-Flächen in sich überführen, Platz finden. Wie aus § 2 folgt, sind durch die Vorgabe der Wurzeln α_i der „charakteristischen Gleichung" (2.11) die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe festgelegt, d.h. die drei Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 bestimmen die eingliedrige Gruppe G_1 von projektiven Transformationen — oder eventuell eine eingliedrige Untergruppe einer zweigliedrigen Gruppe — die die jeweils gesuchte Fläche gestattet.

Es gilt dann

Satz 3. *Die Bahnkurven der zu einer Π-Fläche gehörenden eingliedrigen Gruppe sind dann und nur dann eben, wenn für die Fläche $\Gamma = k = \text{const}$ erreicht werden kann.*

Der Beweis ergibt sich aus der Art unserer Parameterdarstellung der Π-Flächen. Die Bahnkurven sind nämlich dann und nur dann eben, wenn identisch in s eine lineare Abhängigkeit

$$\sum_1^4 f_i(t) \cdot x_i(s,t) = 0 \tag{3.4}$$

der Komponenten x_i des Ortsvektors $\underset{\sim}{x}$ besteht. Gilt $\Gamma \neq k$, so konnte man die Parameterdarstellung der zugehörigen Π-Flächen nach § 2, **4** berechnen. Setzt man diese für die verschiedenen möglichen Fälle in (4) ein, so folgt stets $f_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Andererseits sind bei den Flächen mit $\Gamma = k$, deren Parameterdarstellungen wir auf die Form (2.22) bis (2.25) gebracht hatten, die Bahnkurven ersichtlich eben. Sie liegen in Ebenen des Büschels $f_3(t)\, x_3 + f_4(t)\, x_4 = 0$, die bei den Transformationen der G_1 einzeln festbleiben. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf § 6.

Im Hinblick auf unsere Umkehrfragen gilt, daß es zu jedem Wertetripel c_1, c_2, c_3, also zu jeder G_1, Flächen gibt, die eine vorgegebene halbinvariante Bedingung erfüllen, d.h. auch nach Vorgabe der Bedingung $H = 0$ bleibt die G_1 noch frei wählbar. Das wird natürlich anders, wenn wir mehrere halbinvariante Bedingungen vorschreiben: es gibt dann im allgemeinen, wenn überhaupt, so doch nur für spezielle c_i, also spezielle G_1, Lösungen. Hierzu vgl. man § 5 und § 9.

§ 4. Projektiv abwickelbare Π-Flächen

1. Mit den Π-Flächen, die projektiv abwickelbar sind, hat sich bereits BORŮVKA [6] beschäftigt. Er gibt die APR-Flächen in Gleichungsform an (vgl. unseren § 6) und zeigt mittels der CARTANschen Methode der alternierenden Differentialformen, daß weitere Flächen der verlangten Eigenschaften existieren und von Konstanten abhängen. Auf Grund unserer bis-

herigen Ergebnisse können wir auch diese noch übrigbleibenden Flächen bestimmen[10]).

Da sich bei einer projektiven Abwicklung β und γ nicht ändern — für das Folgende vgl. Bol [3], §§ 84, 119 sowie Čech [9] — muß das System der Integrierbarkeitsbedingungen (1.9) bei den projektiv abwickelbaren Π-Flächen außer dem Lösungssystem β, γ, l, m der abzuwickelnden Fläche noch andere Lösungen $\beta, \gamma, \bar{l}, \bar{m}$ haben. Setzt man $L = \bar{l} - l$, $M = \bar{m} - m$, so gilt nach (1.6)

$$L_2 = 0, \quad M_1 = 0, \quad L_1\gamma = M_2\beta.$$

Da L das Gewicht (2,0), M das Gewicht (0,2) hat, folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$L = f(u), \quad M = g(v), \tag{4.1}$$

während die dritte in der Form

$$\gamma(t)\frac{df}{du} + 2\frac{d\gamma}{dt}f(u) = \beta(t)\frac{dg}{dv} + 2\frac{d\beta}{dt}g(v)$$

geschrieben werden kann. Integrieren wir hier noch nach $t = u + v$, so erhalten wir

$$\gamma(u+v)\cdot f(u) - \beta(u+v)\cdot g(v) = \varphi(u-v) \tag{4.2}$$

mit „willkürlicher" Funktion φ.

2. Da β und γ von der Ausgangsfläche her gegeben zu denken sind, gibt es für die Lösungen dieser Funktionalgleichung folgende zwei Möglichkeiten:

A. Man kann (2) mit $f(u) = a$, $g(v) = b$ (a, b konstant und nicht beide Null) befriedigen. Dann sind die den Lösungswerten von a und b entsprechenden Abwicklungen der Ausgangsfläche wieder Π-Flächen. Wir werden diese unter **3** bestimmen.

B. Man kann (2) außer durch $f = g = \varphi = 0$ nur befriedigen, wenn wenigstens eine der Funktionen f, g nicht konstant ist. Dann sind die Abwicklungen der Ausgangsfläche nicht mehr Π-Flächen. Da aber β und γ nur von $t = u + v$ abhängen, müssen sie unter den von Čech[11]) bestimmten Flächen mit einer eingliedrigen stetigen Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich vorkommen.

Um die Flächen unter B zu finden, hat man also nur zu prüfen, welche der von Čech bestimmten Paare $-\beta, \gamma$[12]) unsere Gl. (2.8_3) befriedigen[13]).

[10]) Spezielle Beispiele solcher Flächen gibt Borůvka in [5].

[11]) Čech [9], vgl. auch [11], Kap. 8 (man beachte aber die dort abweichende Numerierung der Typen). Es läßt sich bei diesen Flächen erreichen, daß β und γ Funktionen von $u + v$ allein werden.

[12]) Da man, um auf unsere Parameter zu kommen, noch die Parametertransformation $u = \bar{u}$, $v = -\bar{v}$ in der Tabelle bei Čech [9] zu machen hat.

[13]) Als Beispiel dafür, daß nicht alle der 30 Typen Čechs auf Π-Flächen abwickelbar sind, sei Typ 25 genannt. Dort ist $\beta = -at$, $\gamma = 1$. Daher hat man $\mathsf{B} = 1 - at$, $\Gamma = -1 - at$ und beim Einsetzen in (2.8_3) sieht man leicht, daß die Gleichung nur mit $a = 0$ zu befriedigen wäre, aber $a = 0$ ist ausgeschlossen, weil die Fläche keine Regelfläche sein darf.

Diese Paare bestimmen dann jeweils projektiv abwickelbare Π-Flächen, deren Parameterdarstellung nach den Resultaten von § 2 aus den Funktionen β und γ ohne weiteres berechnet werden kann[14]).

3. Wir betrachten nun den Fall A, der uns die auf Π-Flächen abwickelbaren Π-Flächen liefern wird. Es gilt dann $f = a = \text{const}$, $g = b = \text{const}$ und aus (2) wird

$$a\gamma(t) - b\beta(t) = \varphi(u - v) = \text{const}. \tag{4.3}$$

Zunächst ist für die Flächen mit $\Gamma = \beta - \gamma = k = \text{const}$ die Gl. (3) mit $a = b$ stets erfüllbar. Man erhält so die sämtlich projektiv abwickelbaren APR-Flächen. Ist $\Gamma \neq k$, so kann man statt (3) schreiben:

$$\mathsf{B} = a_1\Gamma + a_2 \qquad (a_i = \text{const}). \tag{4.4}$$

Um nun die Integrabilitätsbedingungen (2.8) auszunutzen, differenzieren wir (2.8_2) und eliminieren mit Hilfe von (2.3) Φ'. Das liefert die Gleichung

$$\Phi_1' = 2\mathsf{B}\Gamma', \tag{4.5}$$

die sich nach Einsetzen von (4) unmittelbar wieder integrieren läßt:

$$\Phi_1 = a_1\Gamma^2 + 2a_2\Gamma + a_4. \tag{4.6}$$

Setzt man dies in (2.8_3) selbst ein, löst nach Γ' auf und integriert, so folgt unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{cases} n_0 = \frac{1}{4}(a_4^2 - c_3), & n_1 = a_2a_4 + 2c_2, & n_2 = \frac{1}{2}(a_1a_4 + 2a_2^2 + 4c_1) \\ n_3 = a_1a_2, & n_4 = \frac{1}{4}(a_1^2 - 1), & \end{cases} \tag{4.7}$$

die Gleichung[15])

$$t = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{n_4\Gamma^4 + n_3\Gamma^3 + n_2\Gamma^2 + n_1\Gamma + n_0}}. \tag{4.8}$$

Daß diese durch (4) und (8) gekennzeichneten Π-Flächen wirklich projektiv abwickelbar sind, erkennt man auch direkt, wenn man sich a_1 und a_2 fest vorgegeben denkt und ebenso die n_i aus (7). Dann erhält man eine Schar von ∞^1 aufeinander projektiv abwickelbaren Flächen durch Variation von a_4, wobei c_1, c_2, c_3 durch (7) als Funktionen von a_4 festgelegt werden.

Wir wollen die Bestimmung der Parameterdarstellung dieser Flächen, die nach § 2 nun nur noch Quadraturen erfordert, nur in dem Hauptfalle, daß weder die Gl. (2.11) noch die Gleichung

$$n_4x^4 + n_3x^3 + n_2x^2 + n_1x + n_0 = 0 \tag{4.9}$$

[14]) Schwierigkeiten gibt es nur bei den Typen 4 und 6, wo zur Bestimmung von β und γ noch je eine Differentialgleichung 4. Ordnung zu integrieren ist. Durch Vergleich mit unseren Formeln läßt sich deren Ordnung nur um zwei erniedrigen.

[15]) Die additive Integrationskonstante kann als unwesentlich gleich Null gesetzt werden.

mehrfache Wurzeln x besitzt, weiter verfolgen, da die anderen Fälle ganz entsprechend zu erledigen sind.

Durch Auflösung von (8) nach Γ erhält man unter den genannten Verschiedenheitsvoraussetzungen[16]), falls überdies $n_4 \neq 0$:

$$\Gamma(t) = a_0 + \frac{1}{\sqrt{n_4}} \frac{\wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}. \tag{4.10}$$

a_0 bedeute eine Wurzel von (9) und $\wp$ die Weierstraßsche $\wp$-Funktion mit den Invarianten

$$g_2 = n_0 n_4 + \frac{1}{12} n_2^2 - \frac{1}{4} n_1 n_3,$$

$$g_3 = \frac{1}{6} n_0 n_2 n_4 - \frac{1}{16}(n_0 n_3^2 + n_1^2 n_4) + \frac{1}{48} n_1 n_2 n_3 - \left(\frac{n_2}{6}\right)^3.$$

Es sei t_0 in einem den Nullpunkt enthaltenden Periodenparallelogramm der $\wp$-Funktion gelegen und durch die zusammenstimmenden Bedingungen

$$\begin{cases} \wp t_0 = \frac{1}{2} n_4 a_0^2 + \frac{1}{4} n_3 a_0 + \frac{1}{12} n_2 \\ \wp' t_0 = \sqrt{n_4}(n_4 a_0^3 + \frac{3}{4} n_3 a_0^2 + \frac{1}{2} n_2 a_0 + \frac{1}{4} n_1) \end{cases} \tag{4.11}$$

definiert. Da die Wurzeln von (9) als voneinander verschieden vorausgesetzt wurden, ist $\wp' t_0 \neq 0$.

Die Parameterdarstellung unserer Flächen berechnen wir nun mit Hilfe der Gl. (2.14). Mit (4) und (6) erhält man zunächst

$$\log A_i = \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{a_1 \Gamma^2 + 2 a_2 \Gamma + a_4 + 2\Gamma'}{\Gamma - 4\alpha_i} - a_1 \Gamma - a_2 \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2} \log(\Gamma - 4\alpha_i) + \frac{1}{4} \int \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i)\Gamma + 4 a_2 \alpha_i + a_4}{\Gamma - 4\alpha_i} dt.$$

Das rechter Hand verbleibende Integral kann z. B. durch Partialbruchzerlegung der den Integranden bildenden elliptischen Funktion 2. Grades berechnet werden. Definieren wir die Konstanten t_i durch die nach (2.11), (2.8_3) und (6) zusammenstimmenden Formeln

$$\Gamma(t_i) = 4\alpha_i, \qquad 2\Gamma'(t_i) = 16\alpha_i^2 a_1 + 8\alpha_i a_2 + a_4,$$

so ist, wie aus dem Verhalten des Integranden bei $t = t_i$, $t = -t_i$ sofort zu erkennen,

$$(*) \qquad \frac{1}{4} \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i)\Gamma + a_4 + 4 a_2 \alpha_i}{\Gamma - 4\alpha_i} = \frac{1}{2} \zeta(t - t_i) - \frac{1}{2} \zeta(t + t_i) + b_i.$$

Setzt man noch $t = 0$ in die Gleichung ein, so folgt

$$b_i = \zeta t_i + \frac{(a_2 + 4 a_1 \alpha_i) a_0 + a_4 + 4 a_2 \alpha_i}{4(a_0 - 4\alpha_i)}. \tag{4.12}$$

[16]) Wir benutzen im folgenden den Formelapparat der Theorie der elliptischen Funktionen. Man vgl. dazu die Lehrbücher, insbesondere Tricomi und Krafft [*14*], deren Bezeichnungen wir uns hier anschließen. Die Herleitung von (10) aus (8) z. B. findet man in Kap. 2, § 2.

(Ist für ein i etwa $\Gamma'(t_i)=0$, so erhält man für das betreffende b_i den Wert $b_i=\frac{1}{4}a_2+a_1\alpha_i$.) Damit ergibt sich mit Benutzung der integrierten Gl. (*)

$$\log A_i=\frac{1}{2}\log(\Gamma-4\alpha_i)+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_i)}+b_it+\text{const}$$

$$=\log\frac{\sigma t_0}{\sigma t_i}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t+t_i)\,\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_0)\,\sigma(t-t_0)}+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma(t+t_i)}+b_it+\text{const}.$$

Faßt man zusammen, so bekommt man schließlich aus (2.15) die Parameterdarstellung

$$(4.13)\qquad x_i=\varrho\cdot\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma t_i}\,e^{b_it+\alpha_is}\qquad\text{mit}\qquad\varrho=\frac{\sigma t_0}{\sqrt{\sigma(t+t_0)\,\sigma(t-t_0)}}.$$

Auf die Abänderungen, die sich ergeben, wenn mindestens eine der beiden algebraischen Gleichungen 4. Grades (2.11) und (9) mehrfache Wurzeln besitzt, können wir aus Raumgründen nicht eingehen[17]). Wir formulieren das Ergebnis jedoch als

Satz 4. *Die projektiv abwickelbaren Π-Flächen lassen sich in folgende drei Klassen einteilen:*

1. *Die APR-Flächen, die sämtlich projektiv abwickelbar sind.*

2. *Diejenigen Π-Flächen mit $\Gamma\neq k$, die auf Π-Flächen projektiv abwickelbar sind. Sie sind durch* (4) *und* (8) *gekennzeichnet. Ihre Parameterdarstellung kann unter Zuhilfenahme der Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen explizit angegeben werden — im „Hauptfalle"* (vgl. S. 422) *beispielsweise hat sie die einfache Form* (13).

3. *Diejenigen Π-Flächen, die nur auf solche Flächen projektiv abwickelbar sind, die eine eingliedrige Gruppe von echten Projektivabwicklungen in sich gestatten. Ihre Parameterdarstellungen können nach* § 2 *aus den bei* FUBINI, ČECH [*11*], *Kap. 8 bzw.* ČECH [*9*] *angegebenen Funktionenpaaren β, γ berechnet werden, soweit* (2.8_3) *Genüge geleistet werden kann.*

§ 5. Isotherm-asymptotische Π-Flächen

1. Wir beweisen zunächst:

Satz 5. *Die isotherm-asymptotischen Π-Flächen sind sämtlich projektiv abwickelbar.*

Aus der für diese Flächen kennzeichnenden Bedingung $p=q$ — vgl. BOL [*3*], z.B. § 121 — folgt nämlich nach (1.5)

$$\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'=\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'$$

und hieraus nach zweimaliger Integration

$$\beta=e^{2bt+2d}\cdot\gamma\qquad(b,d\text{ konstant}).$$

[17]) Man vgl. jedoch die §§ 8, 9, wo ähnliche Fallunterscheidungen ausführlicher diskutiert werden.

Diese Gleichung ist äquivalent den beiden Gleichungen

$$\beta = e^{bt+d} \cdot T(t), \qquad \gamma = e^{-(bt+d)} \cdot T(t), \tag{5.1}$$

wobei nun $T(t)$ durch Einsetzen von β und γ in (2.8_3) bestimmt werden muß[18]). Umgekehrt erhält man so auch alle isotherm-asymptotischen Π-Flächen. Trägt man (1) in (4.2) ein, so sieht man, daß es offenbar genügt,

$$f(u) = a \cdot e^{2bu+d}, \qquad g(v) = a \cdot e^{-(2bv+d)}$$

zu wählen, um die Gleichung mit $\varphi = 0$ identisch zu befriedigen. Für $b \neq 0$ liegt der Fall B aus § 4 vor. Der Wert $a = 0$ entspricht der Ausgangsfläche, für $a \neq 0$ hat man die Abwicklungen — hier speziell Flächen des Typs 6 bei Čech [9]. Für $b = 0$ sind dagegen die Abwicklungen wieder Π-Flächen und bei $d \neq 0$ nach § 4, **3** die Parameterdarstellung berechenbar. Auf die Flächen mit $b = d = 0$ werden wir in § 6ff. noch zurückkommen.

2. Unter den isotherm-asymptotischen Π-Flächen sind als wichtiger Spezialfall projektiv-transformierte eigentliche Affinsphären, d.h. Π-Flächen, für die

$$l = m = 0, \qquad p = q \neq 0 \tag{5.2}$$

gilt, enthalten[19]). Aus den Integrabilitätsbedingungen (1.6) folgt mit (2) $p_1 = p_2 = 0$, und hieraus durch Integration, da p das Gewicht (1,1) hat (k_2, k_3 seien Konstante)

$$p\gamma = k_2, \qquad p\beta = k_3.$$

Wegen $p \neq 0$ müssen $k_2, k_3 \neq 0$ sein ($\beta\gamma = 0$ gilt nur für Regelflächen). Damit folgt

$$\beta = \frac{k_3}{k_2}\gamma = A\gamma. \tag{5.3}$$

Die gesuchten Flächen gehören also zum Fall A aus § 4. Es kann $A \neq 1$ angenommen werden, da wir auf die in die Flächenklasse (2) gehörenden APR-Flächen mit $A = 1$ in § 9 zurückkommen werden. Aus (3) folgt dann

$$\mathsf{B} = \frac{A+1}{A-1}\Gamma, \tag{5.4}$$

und das entspricht der Relation (4) aus § 4. Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$a_1 = \frac{A+1}{A-1}, \qquad a_2 = 0.$$

---

[18]) Mit diesem Ansatz können auch die Lösungen des Differentialgleichungssystems $p = q = 0$ und damit die zweifachen Komplexflächen, die Π-Flächen sind, bestimmt werden. Die Rechnung zeigt, daß für die Parameterdarstellung nur elementare Funktionen benötigt werden.

[19]) Vgl. Bol [3] § 121, über Affinsphären allgemein auch Blaschke [1], S. 209ff.

Ferner lauten die Bedingungen $l=m=0$ nach (1.5), (2.1) und (2.8) explizit

$$(5.5)\quad \begin{cases} \frac{1}{8}(\mathsf{B}\Gamma-\Phi_1)+\frac{1}{2}c_1+\frac{3}{16}(\mathsf{B}^2-\Gamma^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2=0, \\ -\frac{1}{8}(\mathsf{B}\Gamma-\Phi_1)+\frac{1}{2}c_1+\frac{3}{16}(\mathsf{B}^2-\Gamma^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2=0. \end{cases}$$

Aus (3) folgt $\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}$, und daher liefert die Subtraktion der beiden Gln. (5)

$$(5.6)\qquad \Phi_1=\mathsf{B}\Gamma.$$

Aus (4.6) liest man nun wegen $\mathsf{B}=a_1\Gamma$ ab, daß $a_4=0$. Jetzt bleibt nur noch eine, etwa die erste, der beiden Gln. (5) zu befriedigen. Multiplizieren wir sie mit $4\gamma'$ und integrieren nach t, so folgt mit (6)

$$2c_1\gamma+A\gamma^3-\frac{\gamma'^2}{\gamma}=k_0$$

(hier muß $k_0\neq 0$ sein, da anderenfalls nach Division durch γ und nachfolgende Differentiation auf $p=0$ geschlossen werden könnte). Einsetzen von $\Gamma=(A-1)\gamma$ liefert dann

$$\Gamma'^2=\frac{A}{(A-1)^2}\Gamma^4+2c_1\Gamma^2-k_0(A-1)\Gamma.$$

Diese Gleichung ist mit (4.8) nur dann äquivalent, wenn

$$2c_2=-k_0(A-1),\qquad c_3=0$$

gilt. Hiernach ist also $c_2\neq 0$. Es kann daher auch a_1 nicht Null sein, da dann $\mathsf{B}=0$ und damit nach § 2,3 und (6) $\Phi_1=-4c_2=0$ wäre. Insgesamt gilt somit für die gesuchten Flächen

$$a_1=\frac{A+1}{A-1},\qquad a_2=a_4=0,\qquad c_2\neq 0,\qquad c_3=0,\qquad A^2\neq 1.$$

Die Parameterdarstellung (4.13) des „allgemeinen" Falles vereinfacht sich hiermit noch etwas. Man kann wegen $n_0=0$ auch $a_0=0$ annehmen, so daß nach (4.12) $b_i=\zeta t_i$ wird. Wegen $c_3=0$ wird nach (2.11) eines der α_i, z.B. α_4 gleich Null. Damit ist $a_0=4\alpha_4=0$, also $\Gamma'(t_4)=0$ und nach S. 424f. ist $t_4=b_4=0$ zu setzen. Damit wird aus (4.13)

$$(5.7)\qquad \begin{cases} x_i=\varrho\frac{\sigma(t-t_i)}{\sigma t_i}e^{t\zeta t_i+\alpha_i s}, \\ x_4=\varrho\sigma t. \end{cases}\qquad (i=1,2,3).$$

Hierzu bemerken wir noch folgendes: Bei den Affinsphären fallen die WILCZYNSKIschen ersten Normalen mit den Affinnormalen zusammen — vgl. BOL [3] Bd. 2, S. 110. Daher gehen bei diesen Flächen die WILCZYNSKI-Normalen durch einen festen Punkt $\mathfrak{a}$. Bei uns kann $\mathfrak{a}$ aber nur ein Fixpunkt der zugehörigen eingliedrigen Gruppe, speziell also bei den Flächen (7) eine Ecke des Koordinatentetraeders sein, so daß drei der Komponenten von $\mathfrak{a}$ Null sein müssen. Da $\mathfrak{a}$ als Linearkombination von $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}$ darstellbar

sein muß und in der Darstellung (7) die drei ersten Koordinaten x_i von $\mathfrak{x}$ völlig gleich zusammengesetzt sind, kommt aus Symmetriegründen nur der Fall in Frage, daß $\mathfrak{a}$ die Komponenten (0, 0, 0, 1) hat. Führt man also durch

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_4}, \qquad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_4}, \qquad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{x_4}$$

affine Koordinaten $\bar{x}_i$ ein, so sieht man, daß bei den Affinsphären

$$(5.7') \qquad \bar{x}_i = \frac{\sigma(t - t_i)}{\sigma t \, \sigma t_i} e^{t\zeta t_i + \alpha_i s} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die Normalen alle durch den Nullpunkt (0, 0, 0) gehen. Übrigens sind wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$ die Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppen im Koordinatensystem der $\bar{x}_i$ raumtreue Affinitäten.

3. Bei den in unsere Flächenklasse fallenden APR-Flächen, für die $A = 1$ galt, werden wir in § 9 zu einer ganz entsprechenden Darstellung kommen. Ferner sei ergänzend bemerkt, daß man für die Parameterdarstellung der projektivtransformierten uneigentlichen Affinsphären, für die außer $l = m = 0$ auch $p = q = 0$ gilt, nur elementare Funktionen benötigt. Die Rechnungen, die zu diesem Ergebnis führen, sind einfacher als die vorgeführten[20]), andererseits kann für die uneigentlichen Affinsphären allgemein eine Parameterdarstellung in geschlossener Form angegeben werden — vgl. Blaschke [1] S. 216 — so daß hier auf diese Flächen nicht eingegangen zu werden brauchte.

§ 6. Einige allgemeine Eigenschaften der APR-Flächen

1. Wir hatten schon mehrfach Gelegenheit, auf die ausgezeichnete Stellung hinzuweisen, die innerhalb der Klasse der Π-Flächen den Flächen zukommt, für die $\Gamma = \text{const}$ erreicht werden kann. Sie sind nach § 3, **3** genau die Π-Flächen mit ebenen Bahnkurven. Die Ebenen, in denen diese Bahnkurven liegen, bilden ein Büschel. Dual dazu existiert eine lineare Punktreihe, also eine „Achse", die bei den Transformationen der zur Fläche gehörigen eingliedrigen Gruppe punktweise festbleibt. Wegen dieser Eigenschaften, die zu denen der gewöhnlichen Rotationsflächen analog sind, bezeichnen wir diese Flächen als *Allgemeine Projektivrotationsflächen* (Abkürzung: APR-Flächen).

In § 2 bemerkten wir, daß die APR-Flächen bei der Integration der Ableitungsgleichungen (2.2) eine gesonderte Behandlung beanspruchten. Wir wollen nun die in § 2, **5** gewonnenen Parameterdarstellungen der APR-Flächen noch auf inhomogene Koordinaten spezialisieren. Bei den Flächen (2.22) z. B. setzen wir

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2x_4}, \qquad y = \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{\varepsilon}\, x_4}, \qquad z = \frac{x_3}{x_4},$$

und führen gleichzeitig durch

$$\sqrt{\frac{1}{8}\varepsilon(4c_1 - k^2)} \cdot s = \varphi, \qquad w_2(t) = \frac{1}{r}, \qquad \frac{w_1(t)}{w_2(t)} = f(r)$$

[20]) Vgl. dazu Anmerkung 18.

neue Parameter r, φ ein — wegen $c \neq 0$ ist $w_2(t)$ nie eine Konstante. Ferner setzen wir noch

$$a = \frac{-2k}{\sqrt{2\varepsilon(4c_1 - k^2)}} \quad \text{mit } \varepsilon = -1 \text{ bei } 4c_1 - k^2 < 0,\ \varepsilon = +1 \text{ bei } 4c_1 - k^2 > 0.$$

Damit ergeben sich statt (2.22) die Parameterdarstellungen

$$\text{(A)} \begin{cases} x = r e^{a\varphi} \cos\varphi, \\ y = r e^{a\varphi} \sin\varphi, \quad \text{bei } \varepsilon = -1, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} x = r e^{a\varphi} \mathfrak{Cof}\,\varphi, \\ y = r e^{a\varphi} \mathfrak{Sin}\,\varphi, \quad \text{bei } \varepsilon = +1. \\ z = f(r), \end{cases}$$

Entsprechend sieht man, daß sich die Flächen (2.23) bis (2.25) durch geeignete Wahl der Parameter in der Form

$$\text{(C)} \begin{cases} x = r e^{\varphi}, \\ y = r\varphi e^{\varphi}, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(D)} \begin{cases} x = r + \varphi, \\ y = e^{-k^2\varphi} - 1, \\ z = f(r), \end{cases} \qquad \text{(E)} \begin{cases} x = r + \varphi^2, \\ y = \varphi, \\ z = f(r), \end{cases}$$

darstellen lassen. [Bei den Flächen (D) und (E) wurde unter anderem $w_3(t) = r$ gesetzt.] Aus (A) ergibt sich nun für $a = 0$ die bekannte Darstellung der gewöhnlichen Rotationsflächen. Ferner bilden die Flächen (A), (B) mit $a = 0$ und die Flächen (E) die Klasse der von Süss in [*19*] definierten *Affinrotationsflächen* [Abkürzung: AR-Flächen][21] [22]), denn die in den Ebenen $z = \text{const}$ gelegenen Kurven $r = \text{const}$ sind beim Typ (A) für $a = 0$ Kreise mit dem Mittelpunkt auf der Achse $x = y = 0$, beim Typ (B) für $a = 0$ eine Schar ähnlich gelegener (gleichseitiger) Hyperbeln und beim Typ (E) ähnlich gelegene kongruente Parabeln[23]).

In Verallgemeinerung der bei Süss [*19*] für die AR-Flächen gebrauchten Bezeichnungen nennen wir die Schnittkurve einer der Flächen (A) bis (E) mit der Ebene $y = 0$ *Meridiankurve* der Fläche. Sie kann auch durch $\varphi = 0$ definiert werden und hat in der x, z-Ebene die Gleichung $z = f(x)$. Die Kurven $r = \text{const}$ sind die Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe *(Breitenkurven)* in den Ebenen des Büschels $z = \text{const}$, welches bei den Transformationen der Gruppe elementweise festbleibt. Bei den Flächen (A), (B) und (C) bleibt ferner die z-Achse als „Rotationsachse" punktweise fest. Bei den Flächen (D) und (E) dagegen bleibt kein Punkt im Endlichen fest, da diese Flächen Schiebflächen sind, hier bleibt die Schnittgerade der Ebene $y = 0$ mit der uneigentlichen Ebene punktweise fest und ist daher Achse der Flächen. Wir können diese Flächen dann auch „uneigentliche" APR-Flächen nennen, weil die Achse in einer Ebene des invarianten Büschels liegt, zum Unterschied von den „eigentlichen" APR-Flächen der Typen (A), (B) und (C), bei denen

[21]) Vgl. dazu auch Su [*17a*].

[22]) Man beachte auch Anmerkung 27.

[23]) Hierzu beachte man, daß bei uns Regelflächen ausgeschlossen waren, also insbesondere die Flächen 2. Ordnung, die man sinngemäß auch zu den AR-Flächen rechnen wird.

die „Rotationsachse" nicht in einer Ebene des invarianten Büschels $z = \text{const}$ liegt — vgl. auch Bol [3] § 102, Aufgabe 11.

2. Das Büschel der Ebenen durch die „Rotationsachse" schneidet aus der Fläche die Kurven $\varphi = \text{const}$ aus, ebenso wie die Ebenen des Büschels $z = \text{const}$ die Kurven $r = \text{const}$ definieren. Da das Netz der Parameterkurven $\varphi = \text{const}$, $r = \text{const}$ ein konjugiertes Netz ist, besitzen also die APR-Flächen die Eigenschaften, die Segre [16] (s. dort S. 23) zur Kennzeichnung einer Klasse von projektiv abwickelbaren Flächen, der S-Flächen, benutzt. Es gelten daher die Sätze von Segre über Erzeugung, projektive Abwicklung und Eigenschaften der S-Flächen in sinngemäßer Spezialisierung auch für die APR-Flächen. Bezüglich der projektiven Abwicklung der APR-Flächen vgl. man auch unsere Bemerkungen in § 4,**3** und § 8,**3**. Für ein genaueres Studium verweisen wir auf die eleganten Resultate bei Segre [16].

Daß insbesondere das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ bei den APR-Flächen ein Netz bildet, dessen Laplacesche Invarianten gleich sind, kann zur Kennzeichnung dieser Flächen innerhalb der Klasse der Π-Flächen benutzt werden, denn diese Bedingung besagt, daß für die Koeffizienten B, Γ der zugehörigen Laplaceschen Gl. (2.2_2)

$$-\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial s} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

gilt, was bei uns mit $\Gamma = \text{const}$ äquivalent ist. Hieraus folgt weiter

Satz 6. *Die APR-Flächen sind genau die Π-Flächen, für die das Netz der Bahnkurven und der zu diesen konjugierten, also das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ Laplace-Transformierte besitzt, die in beiden Richtungen entarten.*

Die Behauptung besagt nämlich, daß die beiden Invarianten des Netzes Null, also gleich sind, was nur bei APR-Flächen möglich ist und umgekehrt ist bei den APR-Flächen das Netz der Kurven $s = \text{const}$, $t = \text{const}$ mit dem Netz der Kurven $\varphi = \text{const}$, $r = \text{const}$ identisch, für das die Behauptung des Satzes trivialerweise erfüllt ist[24]).

3. Wir schließen jetzt noch einige Bemerkungen über die AR-Flächen und ihre Projektivtransformierten, für die von Süss in [20] der Name „*Projektivrotationsflächen*" (Abkürzung: PR-Flächen) vorgeschlagen worden ist, an[25]). In unserem System ist für die PR-Flächen $\Gamma = 0$ kennzeichnend, da bei den Typen (A), (B) $k = 0$ mit $a = 0$ äquivalent ist und für die Flächen (E) nach § 2,**5** ebenfalls $k = 0$ gilt. Analog zur Süssschen Kennzeichnung der AR-Flächen läßt sich eine Kennzeichnung der PR-Flächen aus Eigenschaften

[24]) Man kann den Satz 6 auch so einsehen, daß man sich zunächst überlegt, daß die Laplace-Transformierte in der t-Richtung aus einer bei den Transformationen der eingliedrigen Gruppe punktweise fest bleibenden Kurve bestehen muß, die sich nicht auf einen Punkt reduzieren kann. Da Regelflächen ausgeschlossen waren, folgert man weiter, daß diese Kurve eine Gerade sein muß. Nach dem Dualitätsprinzip läßt die zugehörige eingliedrige Gruppe dann auch ein Ebenenbüschel elementweise fest, so daß die Bahnkurven dieser Gruppe eben sein müssen, q.e.d.

[25]) Vgl. Anmerkung 27.

der Normalenkongruenzen herleiten. Wir werden darauf im nächsten Paragraphen zurückkommen.

Ferner besteht die eingliedrige Gruppe einer APR-Fläche in sich, wie man sofort an den Darstellungen (A) bis (E) nachprüft, nur dann aus raumtreuen Affinitäten, wenn die Fläche eine AR-Fläche ist. Es gilt also

Satz 7. *Von Regelflächen*[26]) *abgesehen, sind die AR-Flächen die einzigen Flächen, die eine eingliedrige Gruppe von raumtreuen Affinitäten in sich mit ebenen Bahnkurven gestatten.*

Auch hierin sind also die AR-Flächen die Analoga der Rotationsflächen in der metrischen Differentialgeometrie. Ebenso gilt natürlich

Satz 8. *Die PR-Flächen sind, abgesehen von Regelflächen, die einzigen Flächen, die eine eingliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten, deren Bahnkurven Kegelschnitte sind.*

Von den zahlreichen weiteren Kennzeichnungen, die für die PR-Flächen angegeben worden sind, nennen wir hier nur die von SU [*18*] und SÜSS [*20*] stammende Kennzeichnung als einzige Flächen mit einer Schar ebener DARBOUX-Kurven in den Ebenen eines Büschels oder ebener konischer SEGRE-Kurven in den Ebenen eines Büschels, die wir im nächsten Paragraphen mit benutzen werden.

§ 7. Flächen, deren kanonische Normalen durch zwei feste Geraden laufen

1. Die AR-Flächen sind von SÜSS [*19*] und SU [*17a*] als die Flächen gekennzeichnet worden, deren Affinnormalen alle durch eine feste Gerade *(Achse)* laufen, wobei die Zusatzvoraussetzung gemacht wird, daß die von den Ebenen durch jene Achse ausgeschnittenen Kurven *(Meridiane)* gleichzeitig Schattengrenzen der Fläche bei Parallelbeleuchtung sein sollen. Die Meridiane haben also, projektiv gesehen, die zueinander dualen Eigenschaften, daß jeder von ihnen als Punktmannigfaltigkeit mit einer Ebene durch die Achse inzidiert und gleichzeitig die Berührungskurve einer einparametrigen Schar von Tangentialebenen der Fläche ist, die mit einem Punkt einer zweiten festen Achse in der uneigentlichen Ebene inzidieren. Um die Bezeichnung „Projektivrotationsflächen" (PR-Flächen) für die Projektivtransformierten dieser Flächen neu zu rechtfertigen, wollen wir nun einen Satz beweisen, der die PR-Flächen durch entsprechende Eigenschaften von gewissen, projektiv invariant mit der Fläche verbundenen Normalenkongruenzen kennzeichnet, wobei die Voraussetzungen dual zueinander sind. Wir behaupten

Satz 9. *Gehen bei einer Fläche sämtliche kanonischen Normalen erster und zweiter Art durch je eine feste Gerade, so ist sie eine PR-Fläche und umgekehrt haben alle PR-Flächen diese Eigenschaft. Von Regelflächen wird dabei abgesehen.*

Dieser Satz enthält nicht den Süssschen über die Affinnormalen einer Fläche, da diese nicht in den Ebenen des kanonischen Büschels zu liegen

[26]) Also insbesondere von Zylindern und Kegeln.

brauchen[27]). Wir formulieren unsere Aufgabe zunächst noch etwas anders. In einem festen Flächenpunkt liegen nämlich die Normalen des ersten kanonischen Büschels stets in einer Ebene $\mathfrak{N}$ durch den Flächenpunkt — vgl. Bol [3] § 82. Man nennt diese die kanonische Ebene des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$. Dual dazu gehen die zweiten kanonischen Normalen eines Flächenpunktes alle durch einen Punkt $\mathfrak{k}$, den kanonischen Punkt. Kanonische Ebene und kanonischer Punkt entsprechen sich hinsichtlich der Polarität an der Lie-F_2. Nur bei den Koinzidenzflächen fallen alle kanonischen Normalen zusammen, so daß hier kanonische Ebene und kanonischer Punkt unbestimmt sind. Schließen wir diesen Fall aus, so können wir dem Satz 9 folgende Fassung geben:

Satz 9*. *Bei den PR-Flächen und nur bei diesen bilden, wenn sie eindeutig bestimmt sind, die kanonischen Ebenen ein Büschel und die kanonischen Punkte eine lineare Punktreihe.*

2. Dem Beweis dieser Sätze schicken wir folgende Überlegung voraus. Nach Bol [3] § 82 liegt der Punkt

$$\tilde{\mathfrak{k}} = A_2\mathfrak{x}_1 - B_1\mathfrak{x}_2 \tag{7.1}$$

mit

$$A_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma}, \qquad B_1 = \frac{\beta_1}{\beta} \tag{7.2}$$

auf jeder der zweiten kanonischen Normalen, stellt also den kanonischen Punkt dar[28]). Dual dazu stellt in Ebenenkoordinaten[29])

$$\tilde{\mathfrak{N}} = A_2\mathfrak{X}_1 - B_1\mathfrak{X}_2 \tag{7.3}$$

die kanonische Ebene dar. Da wir Koinzidenzflächen zunächst ausgeschlossen hatten, die durch $A_2 = B_1 = 0$ gekennzeichnet sind, kann weder $A_2 = 0$ noch $B_1 = 0$ sein. Wäre z.B. $A_2 = 0$, so liest man aus (1) ab, daß der Punkt $\mathfrak{x}_2$, der auf der Tangente der Asymptotenlinien $u = \text{const}$ liegt, mit $\tilde{\mathfrak{k}}$ zusammenfällt. Liegen dann die Punkte $\tilde{\mathfrak{k}}$ auf einer Geraden, so erkennt man durch Differentiation, daß auch alle weiteren Ableitungen $\mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_{222}, \ldots$ auf dieser Geraden liegen, so daß die eine Schar von Asymptotenlinien ebene Kurven sein müßten, was nicht geht, da sonst die Fläche eine Regelfläche wäre. Aus dem gleichen Grunde kann natürlich auch B_1 nicht identisch Null sein. Wir können daher den kanonischen Punkt bzw. die kanonische Ebene durch

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 - \alpha\mathfrak{x}_2, \tag{7.4}$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{X}_1 - \alpha\mathfrak{X}_2, \tag{7.5}$$

---

[27]) Satz 9 macht wiederum deutlich, daß es nicht zweckmäßig sein würde, die projektivtransformierten Affinsphären allgemein zu den PR-Flächen zu rechnen, da manche der für die PR-Flächen gültigen Sätze dann eingeschränkt werden müßten, so z.B. außer unseren Sätzen 6—9 auch der Satz von Su über die Darboux-Kurven.

[28]) Die Formeln dortselbst müssen allerdings noch vom Fubinischen System $\lambda = \mu = (\beta\gamma)^{-1}$ auf das Wilczynskische System $\lambda = \gamma$, $\mu = \beta$ umgerechnet werden. Dabei wird $\varphi = B_1$, $\psi = A_2$ und aus (82.9) folgt (1).

[29]) $\mathfrak{X}$ bezeichne die Ebene durch die Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ — vgl. Bol [3] § 77.

mit

$$\alpha = \frac{B_1}{A_2} \tag{7.6}$$

darstellen.

3. Der eigentliche Beweis von Satz 9* ist einfach. Sollen zunächst die kanonischen Punkte $\mathfrak{k}(u, v)$ einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ eine lineare Punktreihe darstellen, so muß sicher identisch in u, v gelten

$$f\mathfrak{k} + g\mathfrak{k}_1 + h\mathfrak{k}_2 = 0, \tag{7.7}$$

wobei f, g, h nicht gleichzeitig identisch Null sein dürfen. Mit Benutzung der Ableitungsgleichungen (1.4) folgt

$$(gl - g\alpha q + hp - h\alpha m)\,\mathfrak{x} + (f - \alpha\gamma h)\,\mathfrak{x}_1 + \\ + (-\alpha f + \beta g - \alpha_1 g - \alpha_2 h)\,\mathfrak{x}_2 + (-\alpha g + h)\,\mathfrak{y} = 0.$$

Da $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten dieser Gleichung einzeln verschwinden. Es ist also

$$\left\{\begin{array}{rr} (l - \alpha q)\,g + (p - \alpha m)\,h = 0, \\ f \qquad\qquad\qquad - \alpha\gamma h = 0, \\ -\alpha f + (\beta - \alpha_1)\,g \qquad - \alpha_2 h = 0, \\ -\alpha g \qquad\qquad + h = 0. \end{array}\right. \tag{7.8}$$

Diese vier Gleichungen zur Bestimmung von f, g, h haben nur dann von der Nullösung verschiedene Lösungen, wenn

$$l + \alpha(p - q) - \alpha^2 m = 0, \tag{7.9}$$

$$\beta - \alpha^3\gamma - (\alpha_1 + \alpha\alpha_2) = 0 \tag{7.10}$$

gilt. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann man (8) nach f, g, h auflösen und dann f, g, h aus (7) eliminieren. Man erhält

$$\alpha^2\gamma\mathfrak{k} + \mathfrak{k}_1 + \alpha\mathfrak{k}_2 = 0. \tag{7.11}$$

Aus (9) liest man ab, daß

$$\frac{dv}{du} = \alpha \tag{*}$$

eine Schar von Krümmungslinien der zweiten WILCZYNSKI-Normalen definiert — vgl. BOL [3] § 81 — und zwar sind diese Krümmungslinien Berührungskurven von der Fläche umschriebenen Kegeln, denn die Tangentialebenen der Fläche gehen durch den Punkt $\mathfrak{k}$, dieser aber bleibt beim Fortschreiten längs einer Kurve der Schar fest, wie man aus (11) und (*) erkennt.

4. Für die kanonischen Ebenen $\mathfrak{R}(u, v)$ von $\mathfrak{x}$ muß nun in dualer Weise

$$F\mathfrak{R} + G\mathfrak{R}_1 + H\mathfrak{R}_2 = 0 \tag{7.12}$$

identisch in u, v gelten, wenn sie ein Büschel darstellen sollen. Da für $\mathfrak{X}$ entsprechende Ableitungsgleichungen gelten wie für $\mathfrak{x}$ (man hat nach Bol [3], Formelgruppen (118.11) und (118.12) nur in (1.4) die Größen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{22}, \mathfrak{Y}$ sowie β und γ durch $-\beta$ und $-\gamma$ zu ersetzen) erhält man durch eine formal gleiche Schlußkette wie unter **3** drei weitere Gleichungen, und zwar

$$l + \alpha(p - q) - \alpha^2 m = 0, \tag{7.9}$$

$$-\beta + \alpha^3\gamma - (\alpha_1 + \alpha\alpha_2) = 0, \tag{7.13}$$

$$-\alpha^2\gamma\,\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_1 + \alpha\,\mathfrak{R}_2 = 0. \tag{7.14}$$

Die durch (*) definierte Kurvenschar ist auch eine Schar von Krümmungslinien der ersten Wilczynski-Normalen, da im Wilczynskischen System die Krümmungslinien beider Normalenkongruenzen zusammenfallen (Bol [3] § 92), und zwar müssen diese Kurven ebene Kurven durch die Achse des Büschels der Ebenen $\mathfrak{R}$ sein, denn $\mathfrak{R}$ enthält den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ und bleibt, wie man aus (14) erkennt, beim Fortschreiten längs dieser Kurven fest. Ferner folgt nun aus (10) und (13), daß

$$\beta - \alpha^3\gamma = 0$$

gilt, d.h. aber, die genannte Schar von Krümmungslinien ist überdies eine Schar von Segre-Kurven. Da diese Schar aus ebenen Kurven in den Ebenen eines Büschels besteht, die gleichzeitig von Kegeln, die der Fläche umschrieben werden können, berührt werden, folgt nach dem obengenannten Satz von Süss [20] und Su [18], daß die gesuchten Flächen PR-Flächen sein müssen[30]).

Umgekehrt kann bei den PR-Flächen $\beta = \gamma = \psi(u + v)$ und $l = m$ erreicht werden, so daß nach (2) und (6) $\alpha = 1$ wird und (9), (10) und (13) erfüllt sind. Ferner kann man nun $\mathfrak{k}$ explizit berechnen. Es ist bei den PR-Flächen

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_u - \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_v + \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u - \mathfrak{x}_v = 2\mathfrak{x}_s.$$

Aus unseren Darstellungen (2.22) und (2.25) ist aber abzulesen, daß (es ist ja $k = 0$), $\frac{\partial x_3}{\partial s} = \frac{\partial x_4}{\partial s} = 0$ gilt, so daß $\mathfrak{k}$ stets auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ liegt. Dual dazu ist bei den PR-Flächen auch $\mathfrak{R} = 2\mathfrak{X}_s$. Da man die Komponenten von $\mathfrak{X}$ als dreireihige Determinanten der Matrix $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2)$ erhält, von denen nach (2.22) und (2.25) ebenfalls zwei nur von t abhängen, ist auch $\mathfrak{R}$ Teil einer Geraden. Damit ist Satz 9* bewiesen.

5. Es bleibt nun noch der oben ausgeschlossene Fall der Koinzidenzflächen zu betrachten, bei denen man $\beta = \gamma = 1$ annehmen kann. Die Normalen des kanonischen Büschels fallen alle mit den Wilczynski-Normalen zusammen. Ferner ist die halbinvariante Differentiation mit der gewöhnlichen

[30]) Die Anwendung des Satzes von Süss und Su erübrigt sich, wenn man auch die Bedingungen für die 3. Ableitungen des Ortsvektors heranzieht.

Differentiation identisch. Die Integrabilitätsbedingungen (1.6) lehren, daß

$$l = au + b, \qquad m = av + c \quad (a, b, c \text{ konstant}) \tag{7.15}$$

sein muß. Wir zeigen, daß die Behauptung von Satz 9 nur gilt, wenn $a = 0$, $b = c$ oder, anders ausgedrückt, wenn $l = m$ ist.

Falls die ersten Normalen alle durch einen festen Punkt laufen, liegen die zweiten Normalen alle in einer festen Ebene und umgekehrt[31]).

Dann ist $l = m = 0$ und unsere Behauptung trivial.

Anderenfalls betrachten wir wie unter **2** den Punkt

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_u - \alpha \mathfrak{x}_v. \tag{7.16}$$

$\mathfrak{k}$ liegt auf der zweiten WILCZYNSKI-Normalen durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$. Die Punkte $\mathfrak{x}_u$ oder $\mathfrak{x}_v$ können, wie unter **2** gezeigt, keine Punktreihe beschreiben. Demnach können wir $\alpha \neq 0$ annehmen. Soll für ein geeignetes $\alpha = \alpha(u, v)$ der Punkt $\mathfrak{k}$ eine Gerade beschreiben, so muß wieder eine Gleichung von der Form (7) gelten. Man kann dann genau wie unter **3** weiterschließen und erhält wegen $\alpha \neq 0$ und $p = q$

$$l - \alpha^2 m = 0, \tag{7.17}$$

$$1 - \alpha^3 - (\alpha_u + \alpha \alpha_v) = 0. \tag{7.18}$$

Für $a \neq 0$ sind aber (17) und (18) nicht miteinander verträglich, wie man durch Differentiation von (17) sofort erkennt. Ist dagegen $a = 0$, so folgt nach (17) und (18) $\alpha^3 = 1$. Durch geeignete Wahl der Skala auf den Asymptotenlinien kann man $\alpha = 1$ erreichen. Dann folgt aus (17) $l = m$, q.e.d.

Umgekehrt sind mit $\alpha = 1$, $l = m$ die Bedingungen, daß die zweiten und auch die ersten Normalen durch je eine feste Gerade laufen, entsprechend wie oben realisierbar. Damit ist gezeigt, daß nur solche Koinzidenzflächen, die gleichzeitig PR-Flächen sind, Lösungen unseres Problems darstellen. Wegen Satz 9* ist damit dann auch Satz 9 vollständig bewiesen.

§ 8. Integration einer speziellen Picardschen Differentialgleichung

1. Als Einschaltung wollen wir in diesem Paragraphen eine spezielle lineare Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Koeffizienten integrieren, deren Lösungen im nächsten Paragraphen gebraucht werden. Es sei — die Bezeichnungen sind im Hinblick auf die Anwendung im nächsten Paragraphen gewählt — $\gamma(t)$ durch die Gleichung

$$t = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_1\gamma^2 + a_2\gamma + 4a_3}} \tag{8.1}$$

[31]) Dieser Fall konnte oben nicht eintreten, da ja sonst für jeden Flächenpunkt die sämtlichen kanonischen Normalen zusammengefallen wären, und das kann nur bei Koinzidenzflächen vorkommen.

definiert[32]) (k, a_1, a_2, a_3 bedeuten Konstante) und

$$\mathsf{B}(t) \equiv \beta(t) + \gamma(t) = 2\gamma(t) + k. \tag{8.2}$$

Zur Bestimmung der Parameterdarstellung der APR-Flächen, für die β, γ (1) und (2) befriedigen, ist nach § 2,5 bei $c \neq 0$ die Differentialgleichung (2.20), bei $c = 0$ die Gl. (2.26) zu integrieren.

Wir werden zeigen

Lemma: *Ist* $\mathsf{B}(t)$ *durch* (2) *und* (1) *bestimmt, so lassen sich die Differentialgleichungen* (2.20) *und* (2.26) *in geschlossener Form integrieren, und zwar mit den Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen oder mit elementaren Funktionen, je nachdem, ob die Wurzeln* h_i *der algebraischen Gleichung 4. Grades*

$$x^4 + 2k x^3 + 4a_1 x^2 + a_2 x + 4a_3 = 0 \tag{8.3}$$

voneinander verschieden sind oder nicht.

Sind dann k_1, k_2 *zwei Integrationskonstanten, so hat das allgemeine Integral von* (2.20) *die Form*

$$A(t) = k_1 w_1(t) + k_2 w_2(t)$$

und dasjenige von (2.26) *die Form*

$$A(t) = k_1 + k_2 \lim_{c \to 0} \{w_2(t, c)\} + w_3(t).$$

Für die verschiedenen möglichen Fälle gilt dann folgendes: Tabelle 1 enthält mit den Bezeichnungen aus Tabelle 2 die Funktionen $\mathsf{B}(t)$, *die sich durch Auflösung von* (1), (2) *je nach der Vielfachheit der Wurzeln von* (3) *ergeben. Tabelle 3 gibt dann die Funktionen* w_1, w_2, w_3 *für die verschiedenen zugehörigen Fälle, je nach der speziellen Wahl der Konstanten* k, a_1, a_2, a_3.

Wir werden den Beweis für das Lemma aus Raumgründen nicht mit allen Sonderfällen vorführen, da man sich durch Eliminationen und Differentiationen leicht davon überzeugt, daß die in Tabelle 1 angegebenen Funktionen $\mathsf{B}(t)$ die Auflösung von (1), (2) darstellen und daß die Funktionen w_1, w_2 bzw. w_2, w_3 aus Tabelle 3 die entsprechend spezialisierten Differentialgleichungen (2.20) bzw. (2.26) befriedigen und überdies linear unabhängig sind. Ebenso leicht sieht man ein, daß die angegebenen Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen.

Um aber zu zeigen, wie man zu den Lösungen aus Tabelle 3 kommt, werden wir den „Hauptfall" diskutieren, bei dem die Wurzeln h_i von (3) alle voneinander verschieden sind. Hierbei kann man sich auf den Fall $c \neq 0$ beschränken, da zur Integration der Differentialgleichung (2.26)

$$A'' - \mathsf{B}(t) A' + 1 = 0 \tag{8.4}$$

[32]) Die additive Integrationskonstante bei t ist für alles Folgende unwesentlich. Man kann sich das zunutze machen, um bei gegebenen reellen k, a_i durch geeignete Verfügung über diese Konstante die unten angegebenen Lösungen so zu schreiben, daß sie in einem gewissen Intervall der reellen Achse reelle Funktionswerte liefern.

nur Quadraturen erforderlich sind und insbesondere ein nicht konstantes partikuläres Integral der zugehörigen homogenen Gleichung (die aus (2.20) bzw. (5) mit $c=0$ entsteht) durch den Grenzübergang $c\to 0$ aus einem geeigneten partikulären Integral $w_2(t, c)$ dieser Gleichung

$$A''-\mathsf{B}(t)\,A'+cA=0, \tag{8.5}$$

erhalten werden kann. Ein partikuläres Integral w_3 der inhomogenen Gl. (4) findet man dann mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2. Zunächst läßt sich allgemein durch die Substitution

$$A(t)=Z(t)\cdot e^{\frac{1}{2}\int \mathsf{B}(t)dt} \tag{8.6}$$

aus (5) das Glied mit der ersten Ableitung entfernen. Zur Bestimmung von $Z(t)$ erhält man die Gleichung

$$Z''-(\tfrac{1}{4}\mathsf{B}^2-\tfrac{1}{2}\mathsf{B}'-c)\,Z=0. \tag{8.7}$$

Sind die Wurzeln h_i von (3) alle voneinander verschieden, so kann man nach einer bekannten Formel — vgl. TRICOMI [*14*] S. 118[33]) — die Auflösung von (1) nach γ in der Form

$$\gamma=-\frac{1}{2}\,k+\frac{1}{2}\,\frac{\wp' t-\wp' t_0}{\wp t-\wp t_0} \tag{8.8}$$

schreiben, falls die Wurzel in (1) positiv ausgezogen wird. Die Invarianten g_2, g_3 der in dieser Gleichung auftretenden WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion mit den Perioden $2\omega_1, 2\omega_2$ haben dabei die Werte

$$g_2=4a_3-\tfrac{1}{2}a_2k+\tfrac{1}{3}a_1^2,\quad g_3=\tfrac{8}{3}a_1a_3-k^2a_3-\tfrac{1}{16}a_2^2+\tfrac{1}{6}ka_1a_2-\tfrac{8}{27}a_1^3. \tag{8.9}$$

Ferner sei t_0 durch die zusammenstimmenden Formeln

$$\wp t_0=\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{2}{3}a_1,\qquad \wp' t_0=\tfrac{1}{4}k^3-ka_1+\tfrac{1}{4}a_2 \tag{8.10}$$

definiert und im Periodenparallelogramm mit den Ecken $\pm\omega_1\pm\omega_2$ gelegen. Nach (8) und (2) gilt

$$\mathsf{B}(t)=\frac{\wp' t-\wp' t_0}{\wp t-\wp t_0}. \tag{8.11}$$

Hieraus ergibt sich für den Koeffizienten von $Z(t)$ in (7)

$$\begin{aligned} I\equiv\frac{1}{4}\mathsf{B}^2-\frac{1}{2}\mathsf{B}'-c&=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' t-\wp' t_0}{\wp t-\wp t_0}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\wp' t-\wp' t_0}{\wp t-\wp t_0}\right)-c\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' t-\wp' t_0}{\wp t-\wp t_0}\right)^2+\wp(t+t_0)-\wp t-c=2\wp(t+t_0)+\wp t_0-c. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen noch mit t_1 eine der beiden wie t_0 normierten Lösungen der Gleichung

$$\wp t_1=\wp t_0-c. \tag{8.12}$$

[33]) Es ist dort in Formel (2.61) ein Fehler bei $\wp' v$ zu korrigieren.

Setzen wir nun unser Resultat in (7) ein, so ergibt sich die LAMÉsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - [2\wp(t + t_0) + \wp t_1] Z = 0. \tag{8.13}$$

Diese hat — vgl. KAMKE [15] S. 409 — die beiden partikulären Lösungen

$$Z_{1,2} = e^{\mp t\zeta t_1} \frac{\sigma(t + t_0 \pm t_1)}{\sigma(t + t_0)},$$

die linear unabhängig sind, solange $2t_1$ keine Periode der $\wp$-Funktion ist. Da nach (11) noch

$$\frac{1}{2}\int \mathsf{B}(t)\, dt = \log \frac{\sigma(t + t_0)}{\sigma t} - t\zeta t_0 + C$$

Tabelle 1

	h_i	$\mathsf{B}(t)$
1a	Alle voneinander verschieden	$\dfrac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}$
1b	Alle voneinander verschieden	$-\dfrac{\wp' t - \wp' t_0}{\wp t - \wp t_0}$
2	$h_1 = h_2,\ h_1 \neq h_3 \neq h_4 \neq h_1$	$2\varrho\left(\operatorname{ctg} 2\bar{t}_0 - \dfrac{2\sin 2\bar{t}_0}{\cos 2\bar{t} - \cos 2\bar{t}_0}\right)$
3a	$h_1 = h_2,\ h_3 = h_4,\ h_1 \neq h_3$	$-2r\operatorname{Ctg} rt$
3b	$h_1 = h_2,\ h_3 = h_4,\ h_1 \neq h_3$	$+2r\operatorname{Ctg} rt$
4	$h_1 = h_2 = h_3,\ h_1 \neq h_4$	$b + \dfrac{4b}{b^2 t^2 - 1}$
5a	$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \left(= -\dfrac{k}{2}\right)$	$-\dfrac{2}{t}$
5b	$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \left(= -\dfrac{k}{2}\right)$	$+\dfrac{2}{t}$

Tabelle 2. Bezeichnungen

Zu Fall 1	Elementare Perioden der $\wp$-Funktion: $2\omega_1, 2\omega_2$. Ferner sei $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ und g_2, g_3 durch (9), t_0 durch (10), t_1 durch (12) definiert, wobei t_0, t_1 im Periodenparallelogramm mit den Ecken $E_i = (\pm\omega_1 \pm \omega_2)$ liegen sollen. Bei Fall 1b ist in (10) t_0 durch $-t_0$ zu ersetzen.
Zu Fall 2	$\bar{t} = \varrho t,\ \bar{t}_0 = \varrho t_0,\ \bar{t}_1 = \varrho t_1$ mit $(-\pi < 2\bar{t}_0, 2\bar{t}_1 \leq +\pi)$ und $2\varrho = \pm\sqrt{(h_1 - h_3)(h_4 - h_1)}$. Es sei $\bar{t}_0$ durch die Gleichungen $(h_3 - h_4)\cos 2\bar{t}_0 = 2h_1 - h_3 - h_4$, $(h_3 - h_4)\sin 2\bar{t}_0 = 4\varrho$ und $\bar{t}_1$ durch $\varrho^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{t}_1 = \varrho^2 \operatorname{ctg}^2 2\bar{t}_0 - c$ definiert.
Zu Fall 3	$r = \dfrac{1}{2}(h_1 - h_3) = +\dfrac{1}{2}\sqrt{3k^2 - 8a_1} \neq 0, \quad r_1 = +\sqrt{r^2 - c}.$
Zu Fall 4	$b = \dfrac{1}{2}(h_1 - h_4) = \pm\sqrt{k^2 - \dfrac{8}{3}a_1} \neq 0, \quad b_1 = +\sqrt{1 - \dfrac{4c}{b^2}}.$

Tabelle 3

Fall	w_1	w_2	w_3
1a $t_1 \neq \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_0-t_1)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta t_1)}$	$\frac{\sigma(t+t_0+t_1)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0+\zeta t_1)}$	$\frac{1}{\wp' t_0}\,[\zeta t + t\,\wp t_0]$
1a $t_1 = \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_0-\omega_i)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$[\zeta(t+t_0-\omega_i)+t\,\wp\omega_i]\,\frac{\sigma(t+t_0-\omega_i)}{\sigma t}\, e^{-t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$\frac{1}{\wp''\omega_i}\,[\wp t-(\zeta t+t\,\wp\omega_i)^2]$
1b $t_1 \neq \omega_i$	$\frac{\sigma(t+t_1)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta t_1)}$	$\frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0+\zeta t_1)}$	$-\frac{1}{\wp' t_0}\,[\zeta(t+t_0)+t\,\wp t_0]$
1b $t_1 = \omega_i$	$\frac{\sigma(t+\omega_i)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$[\zeta(t+\omega_i)+t\,\wp\omega_i]\,\frac{\sigma(t+\omega_i)}{\sigma(t+t_0)}\, e^{t(\zeta t_0-\zeta\omega_i)}$	$\frac{1}{\wp''\omega_i}\,[\wp(t+\omega_i)-\{\zeta(t+\omega_i)+t\,\wp\omega_i\}^2]$
2 $2\bar{t}_1 \neq \pi$	$\frac{\sin(\bar{t}-\bar{t}_0+\bar{t}_1)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}(\operatorname{ctg}2\bar{t}_0-\operatorname{ctg}\bar{t}_1)}$	$\frac{\sin(\bar{t}-\bar{t}_0-\bar{t}_1)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}(\operatorname{ctg}2\bar{t}_0+\operatorname{ctg}\bar{t}_1)}$	$\frac{1}{2\varrho^2}\,\frac{\sin^3 2\bar{t}_0}{\cos 2\bar{t}_0}\left[\operatorname{ctg}(\bar{t}+\bar{t}_0)+\frac{\bar{t}}{\sin^2 2\bar{t}_0}\right]$
2 $2\bar{t}_1 = \pi$	$\frac{\cos(\bar{t}-\bar{t}_0)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}\operatorname{ctg}2\bar{t}_0}$	$[\operatorname{tg}(\bar{t}-\bar{t}_0)-\bar{t}]\,\frac{\cos(\bar{t}-\bar{t}_0)}{\sin(\bar{t}+\bar{t}_0)}\, e^{\bar{t}\operatorname{ctg}2\bar{t}_0}$	$-\frac{1}{\varrho^2}\left[\bar{t}\operatorname{ctg}\left(\bar{t}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\,\bar{t}^2\right]$
3a $r_1 \neq 0$	$\frac{\mathfrak{Sin}\, r_1 t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$\frac{\mathfrak{Cof}\, r_1 t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$-\frac{t}{2r}\,\mathfrak{Ctg}\, r t$
3a $r_1 = 0$	$\frac{1}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	$\frac{r t}{\mathfrak{Sin}\, r t}$	—
3b $r_1 \neq 0$	$\mathfrak{Cof}\, r t\,\mathfrak{Cof}\, r_1 t - \frac{r_1}{r}\,\mathfrak{Sin}\, r t\,\mathfrak{Sin}\, r_1 t$	$\frac{1}{c}\left[\mathfrak{Sin}\, r t\,\mathfrak{Cof}\, r_1 t - \frac{r}{r_1}\,\mathfrak{Cof}\, r t\,\mathfrak{Sin}\, r_1 t\right]$	$+\frac{1}{2r^2}\,\mathfrak{Cof}^2 r t$
3b $r_1 = 0$	$\mathfrak{Cof}\, r t$	$\mathfrak{Sin}\, r t - r t\,\mathfrak{Cof}\, r t$	—
4 $b_1 \neq 0$	$\left[\frac{1-b_1}{1+b t}+\frac{1}{2}\,b_1\right] e^{\frac{1}{2}(1-b_1)bt}$	$\left[\frac{1+b_1}{1+b t}-\frac{1}{2}\,b_1\right] e^{\frac{1}{2}(1+b_1)bt}$	$\frac{1}{b^2}\left[b t+\frac{4}{1+b t}\right]$
4 $b_1 = 0$	$\frac{1}{1+b t}\, e^{\frac{1}{2}bt}$	$\frac{(1-b t)^3}{1+b t}\, e^{\frac{1}{2}bt}$	—
5a	$\frac{1}{t}\sin t\sqrt{c}$	$\frac{1}{t}\cos t\sqrt{c}$	$-\frac{1}{6}\,t^2$

gilt, bilden dann

$$(8.14)\qquad \begin{cases} w_1 = e^{-t(\zeta t_0 - \zeta t_1)} \dfrac{\sigma(t + t_0 - t_1)}{\sigma t} \\ w_2 = e^{-t(\zeta t_0 + \zeta t_1)} \dfrac{\sigma(t + t_0 + t_1)}{\sigma t} \end{cases},$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen für die aus (5) mit dem Koeffizienten $\mathsf{B}(t)$ aus (11) gebildete Differentialgleichung. Ist dagegen c so gewählt, daß $t_1 = \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, also $2t_1$ eine Periode der $\wp$-Funktion ist, so hat man in

$$(8.15)\qquad w_2^* = [\zeta(t + t_0 - \omega_i) + t\,\wp\,\omega_i] \frac{\sigma(t + t_0 - \omega_i)}{\sigma t} e^{-t(\zeta t_0 - \zeta\omega_i)}$$

— vgl. KAMKE l. c. — ein von w_1 linear unabhängiges Integral der Differentialgleichung. Wird in (1) die Wurzel negativ ausgezogen, so hat man in (11) t durch $-t$ zu ersetzen. Ersetzt man auch t_0 durch $-t_0$, so ist in (10) bei $\wp' t_0$ die rechte Seite mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen. Man erhält dann nach analogen Rechnungen wie soeben die in Tabelle 3 unter Fall 1 b) angegebenen Lösungen[34]). Für den Fall $c = 0$ verweisen wir auf die Bemerkungen unter **1**.

3. Besitzt die algebraische Gl. (3) mehrfache Wurzeln h_i, so benötigt man zur Darstellung von $\mathsf{B}(t)$ und zur Integration von (5) und (4) nur elementare Funktionen. Wir übergehen daher die rechnerische Durchführung und fassen nur die Resultate in Tabellenform zusammen.

§ 9. Auf Projektivminimalflächen abwickelbare APR-Flächen

Ziel dieses Paragraphen ist die Bestimmung der Parameterdarstellung der APR-Flächen, die auf Projektivminimalflächen projektiv abwickelbar sind. Diese Flächenklasse enthält die APR-Flächen der meisten von BOL in [3], § 121 angegebenen projektiv wichtigen Flächenklassen, die sich durch Eigenschaften der DEMOULINschen Kongruenzen kennzeichnen lassen, insbesondere die APR-Flächen, die Flächen von DEMOULIN, projektiv-transformierte Affinsphären oder ein- bzw. zweifache Komplexflächen sind. Nachdem aus den kennzeichnenden halbinvarianten Bedingungsgleichungen β, γ durch Integration bestimmt sind, ist nach § 3,5 noch die Integration einer linearen Differentialgleichung vom Typus

$$(9.1)\qquad \frac{d^2A}{dt^2} - \mathsf{B}(t)\frac{dA}{dt} + cA = a \qquad (a, c = \text{const})$$

zu leisten. Da sich zeigen wird, daß in dem von uns zu betrachtenden Fall $\mathsf{B}(t)$ durch die Gln. (1) und (2) des vorigen Paragraphen definiert werden kann, erhält man auf Grund des dort abgeleiteten Lemmas explizite Parameter-

[34]) Man kann dieses Ergebnis auch aus einem allgemeineren Satz von SEGRE [16] S. 44 ff. über den Zusammenhang der Integrale von (5) und der aus (5) durch Ersetzung von $\mathsf{B}(t)$ durch $-\mathsf{B}(t)$ entstehenden Differentialgleichung herleiten.

darstellungen der gesuchten Flächen aus Tabelle 3, die demnach außer elementaren Funktionen höchstens die Transzendenten aus der Theorie der elliptischen Funktionen enthalten.

1. Wir beginnen damit, l, m explizit als Funktionen von β, γ auszudrücken. Aus (2.8) erhält man durch Addition und Subtraktion der beiden ersten Gleichungen mit Benutzung von (2.1) und der Gleichung $\Gamma = k$:

$$\text{(9.2)} \qquad \begin{cases} \pi = \frac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma - \frac{1}{2}\gamma' + \frac{1}{2}(c_1 + \frac{1}{4}k^2), \\ \chi = \frac{3}{4}\beta^2 - k\beta - \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{2}(c_1 + \frac{1}{4}k^2). \end{cases}$$

Verwendet man die Abkürzung

$$\text{(9.3)} \qquad a_0 = \tfrac{1}{2}(c_1 + \tfrac{1}{4}k^2) = \tfrac{1}{2}k^2 - c,$$

so erhält man durch Einsetzen in die in § 1 für l, m angegebenen Ausdrücke (1.5)

$$\text{(9.4)} \qquad \begin{cases} l = \frac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma + a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2, \\ m = \frac{3}{4}\beta^2 - k\beta + a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2. \end{cases}$$

2. Als nächstes sind nun die Größen β und γ für unsere gesuchten Flächen zu bestimmen. Da sich bei einer projektiven Abwicklung β und γ nicht ändern — vgl. dazu auch § 4 — werden wir keine Lösungen unseres Problems verlieren, wenn wir β und γ als Funktionen von t nur für die Projektivminimalflächen unter den APR-Flächen selbst berechnen und die Abwicklungen zunächst nicht mit berücksichtigen, da ja zu gegebenen Funktionen $\beta(u+v)$, $\gamma(u+v)$ mit $\beta - \gamma = k = \text{const}$ nach § 4,**1** und 4,**2** stets auch Funktionenpaare $l(u+v)$, $m(u+v)$ gefunden werden können, die die Integrabilitätsbedingungen (1.6) erfüllen. Soll eine Fläche Projektivminimalfläche sein, so gilt $l_1 = 0$ — vgl. BOL [3] § 121 — und hieraus folgt nach § 1 durch Integration, da l das Gewicht (2,0) hat

$$\text{(9.5)} \qquad l\gamma^2 = a_3 \qquad (a_3 = \text{const}).$$

Setzt man aus (4) den Wert für l ein, so entsteht zur Bestimmung von $\gamma(t)$ die Differentialgleichung

$$\text{(9.6)} \qquad \tfrac{3}{4}\gamma^2 + k\gamma + a_0 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = \frac{a_3}{\gamma^2}.$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung ergibt sich aus der Annahme, daß γ' identisch verschwindet, denn dann liefert (6) eine algebraische Gleichung 4. Grades zur Bestimmung von γ; wegen $\beta - \gamma = k$ ist dann auch β konstant und die zugehörigen Flächen müssen Koinzidenzflächen sein — vgl. hierzu **4** auf S. 443. — Anderenfalls läßt sich die mit $4\gamma'$ multiplizierte Gl. (6) unmittelbar nach t integrieren und liefert

$$\text{(9.7)} \qquad \gamma^3 + 2k\gamma^2 + 4a_0\gamma - \frac{\gamma'^2}{\gamma} + 4\frac{a_3}{\gamma} + a_2 = 0 \qquad (a_2 = \text{const}).$$

Jetzt lassen sich die Veränderlichen trennen. Es folgt

$$t = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_0\gamma^2 + a_2\gamma + 4a_3}}. \tag{9.8}$$

Durch diese Gleichung ist nun γ als Funktion von t festgelegt.

3. Nach § 4,**3** und § 4,**1** erhält man Abwicklungen einer gegebenen APR-Fläche, indem man β, γ beibehält und l, m durch $\bar{l} = l + a$, $\bar{m} = m + a$ mit beliebiger Konstante a ersetzt. Für die abgewickelten Flächen hat man dann nach (4) $\bar{a}_0 = a_0 - a$. Diese Beziehung kann man so auffassen, daß für die Abwicklungen einer gegebenen APR-Fläche die Konstante a_0 nicht mehr durch (3) an c_1 bzw. c gebunden, sondern frei variabel ist. Die Gl. (8) bleibt also für die Abwicklungen der Projektivminimalflächen unter den APR-Flächen gültig, wir wollen aber der Deutlichkeit halber a_0 durch eine neue, freie Konstante a_1 ersetzen und für a_0 die Definitionsgleichung (3) beibehalten. Damit geht aber die Gl. (8) in die Gl. (8.1) über, und unsere Aufgabe ist auf das in § 8 gelöste Problem zurückgeführt, da wegen $\beta - \gamma = k$ auch (8.2) erfüllt ist.

Wir brauchen also nur noch die in Tabelle 3 zusammengefaßten Lösungen in die allgemeinen in § 2,**5** gefundenen Darstellungen einzusetzen, um die gesuchten Parameterdarstellungen für unsere Flächen zu erhalten[35]). Diese verteilen sich daher auf verschiedene Klassen, je nach dem Wert der Konstanten k, a_i, die die Vielfachheit der Wurzeln von (8.3) bestimmen und dem Wert von c, bzw. a_0, der bei gleichen k, a_i $(i = 2, 3)$ die Fläche aus einer Schar aufeinander projektiv abwickelbarer heraushebt. Falls $c \neq 0$, hat man w_1, w_2 in (2.22) und (2.23) einzusetzen, falls $c = 0$ dagegen w_2, w_3 in (2.24) und (2.25).

4. Wir wollen zum Schluß noch die APR-Flächen, die in die am Anfang des Paragraphen erwähnten, (hier) spezielleren Flächenklassen gehören, herausheben. Durch $l_1 = 0$ oder $a_1 = a_0$ wurden Projektivminimalflächen definiert, gilt aber nicht nur $l_1 = 0$, sondern schon $l = 0$, so erhält man Flächen mit entartetem Viereck von Demoulin. Aus (5) liest man ab, daß dazu bei uns $a_3 = 0$, $a_1 = a_0$ notwendig und hinreichend ist. Ist dann auch noch $a_2 = 0$, so gilt außer $l = 0$ auch $p = 0$, wie man durch Vergleich von (7) mit der aus der Bedingung $p = 0$ unter **5** abgeleiteten Gl. (14) feststellt, so daß durch $a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = a_0$ Komplexflächen mit entartetem Viereck von Demoulin gekennzeichnet werden.

Ist außer $l = 0$ auch $m = 0$, so werden wir auf Flächen von Demoulin geführt. Es gilt dann (7) mit $a_3 = 0$ und eine entsprechend wie oben aus der Bedingung $m = 0$ zu erhaltende Gleichung für β. Wir können diesen beiden Gleichungen die Form

$$\gamma'^2 = \gamma^2(\gamma + k)^2 + (4a_0 - k^2)\gamma^2 + a_2\gamma, \tag{9.9}$$

$$\beta'^2 = \beta^2(\beta - k)^2 + (4a_0 - k^2)\beta^2 + \bar{a}_2\beta, \tag{9.9'}$$

[35]) Eine Diskussion der Realitätsverhältnisse dieser Darstellungen würde uns hier zu weit führen.

geben. Subtrahiert man sie voneinander, so folgt wegen $\beta' = \gamma'$:

$$0 = (4a_0 - k^2)(\gamma^2 - \beta^2) + a_2\gamma - \bar{a}_2\beta$$

und hieraus

$$\gamma[-2k(4a_0 - k^2) - \bar{a}_2 + a_2] - k[k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2] = 0.$$

Lassen wir nun Koinzidenzflächen unberücksichtigt, so muß, da dann γ nicht konstant sein kann,

$$2k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2 - a_2 = 0,$$

$$k[k(4a_0 - k^2) + \bar{a}_2] = 0$$

gelten. Wir haben dann die beiden wesentlich verschiedenen Fälle

$$(9.10) \quad \begin{cases} \text{I)} & k \neq 0 & \text{also} & a_2 + \bar{a}_2 = 0 & \text{und} & \bar{a}_2 = k(k^2 - 4a_0) \\ \text{II)} & k = 0 & \text{also} & a_2 - \bar{a}_2 = 0 \end{cases}$$

zu unterscheiden.

Die Flächen I) bestehen, entsprechend den Fällen $a_2 = 0$ und $a_2 \neq 0$ aus

a) den Projektivtransformierten von uneigentlichen Affinsphären, welche APR- aber keine PR-Flächen sind, und

b) den Flächen von DEMOULIN, welche APR-Flächen, aber keine Projektivtransformierten von eigentlichen oder uneigentlichen Affinsphären sind, da $a_2 = 0$ gleichbedeutend mit $4a_0 - k^2 = 0$ ist, woraus wie oben $p = q = l = m = 0$ folgt[36]).

Die Flächen II), die wegen $k = 0$ PR-Flächen sind, bestehen entsprechend den Fällen $a_2 = 0$ und $a_2 \neq 0$ aus

a) Projektivtransformierten von uneigentlichen Affinsphären, und

b) Projektivtransformierten von eigentlichen Affinsphären.

Bei den letzteren, den projektivtransformierten eigentlich-affinsphärischen PR-Flächen[37]), schreiben wir als Ergänzung zu § 5 für den zu (5.7) analogen Fall die Parameterdarstellung ausführlich hin. Es gilt dann $k = 0$, $a_1 = a_0$ und $a_3 = 0$. Als Lösung der transzendenten Gl. (8.12) haben wir für $c \neq 0$: $2t_1 = t_0$, für $c = 0$: $t_1 = t_0$. Durch Einsetzen von w_1, w_2 aus Tabelle 3, Fall 1a mit $t_1 \neq \omega_i$ ($t = \omega_i$ ist nicht möglich) in (2.22) bzw. von w_1, w_3 in (2.25) ergeben

[36]) Unter den Flächen Ib) kommen also keine vom Typ (2.23) vor, da für diese stets $4a_0 = k^2$ ist.

[37]) In der Literatur sind für diese Flächen bzw. deren Meridiankurven schon mehrfach Parameterdarstellungen angegeben worden. Man vgl. z.B. TZITZÉICA [*21*] S. 214, CALUGAREANU [*8*] und JONAS, Math. Nachr. **10**, 331—352 (1953) (insbesondere S. 345 bis 347). Die genannten Autoren gehen von der Tatsache aus, daß für die Affinsphären der Quotient aus Gaussscher Krümmung und 4. Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom „Mittelpunkt" der Fläche für alle regulären Flächenpunkte konstant ist. Man vgl. auch die Kennzeichnung unserer Flächen, die sich aus Theorem 34 und 35 bei SU [*17e*] ergibt.

sich die Darstellungen

$$(9.11)\qquad \begin{cases} x_1 = \varrho\, e^{s\sqrt{-c}}, \\ x_2 = \varrho\, e^{-s\sqrt{-c}}, \\ x_3 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+\frac{1}{2}t_0)}{\sigma t}\cdot e^{-t\zeta(\frac{1}{2}t_0)}, \\ x_4 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+\frac{3}{2}t_0)}{\sigma t}\cdot e^{-3t\zeta(\frac{1}{2}t_0)}, \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} x_1 = \varrho\left(\dfrac{1}{2}s^2 + \dfrac{4}{a_2}\zeta t\right), \\ x_2 = \varrho\, s, \\ x_3 = \varrho\, \dfrac{\sigma(t+2t_0)}{\sigma t}\, e^{-2t\zeta t_0}, \\ x_4 = \varrho. \end{cases}$$

(Diese Darstellungen sind reell, falls $c \leqq 0$ gewählt wird.) Man erkennt die Analogie zur Darstellung (5.7)[38]).

Unter unseren Flächen mit $l_1 = 0$ sind auch als projektive Abwicklungen von eigentlich-affinsphärischen PR-Flächen die speziellen *Koinzidenzflächen*, bei denen β, γ, l, m zu Konstanten gemacht werden können, enthalten. Diese sind sehr oft untersucht worden[39]). Sie gestatten eine zweigliedrige Gruppe von Projektivitäten in sich, die nur dann aus raumtreuen Affinitäten besteht, wenn die Fläche durch eine affine Transformation aus den beiden Affinsphären

$$(9.12)\qquad z(x^2 + \varepsilon y^2) = 1 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

hervorgeht (x, y, z bedeuten hier affine Koordinaten) — vgl. Blaschke [*1*], S. 243. Die Meridiankurven dieser Koinzidenzflächen sind ebene W-Kurven. Dies alles läßt sich auch mit unseren Hilfsmitteln ohne Schwierigkeit nachweisen.

5. Daß auch die (einfachen) Komplexflächen unter den APR-Flächen zu den von uns betrachteten Flächen gehören, kann man einerseits leicht aus den Integrabilitätsbedingungen (1.6) ablesen, denn für die Komplexflächen gilt identisch $p = 0$, und damit folgt aus (1.6) $l(t) = \text{const}$. Die Flächen mit $l = \text{const}$ sind aber als Abwicklungen der Flächen mit $l = 0$ sicher unter den oben betrachteten Flächen enthalten. Andererseits läßt sich unsere Behauptung auch durch direkte Integration der Differentialgleichung $p = 0$ beweisen. Es ist nach (1.5)

$$(9.13)\qquad p = \frac{1}{2}\left[\beta\gamma - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)'\right] = 0$$

oder wegen $\beta - \gamma = k$

$$\gamma(\gamma + k) - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)' = 0.$$

[38]) Die Flächen hängen von den beiden willkürlichen Konstanten a_2, c ab. In unserer speziellen Darstellung (11) gehen alle Wilczynski-Normalen durch den Punkt (0, 0, 0, 1) des Koordinatentetraeders und die vom Punkt $\mathfrak{y}$ — s. § 1 — beschriebene Fläche ist spiegelbildlich bezüglich des Nullpunktes (0, 0, 0, 1) — in affiner Sprechweise — zur Ausgangsfläche gelegen.

[39]) Vgl. z.B. Segre [*16*] S. 54—57, Bol [*2*] S. 148, Bol [*3*] und die bei Fubini und Čech [*12*] S. 104 zitierten Arbeiten.

Multipliziert man diese Gleichung mit $2\frac{\gamma'}{\gamma}$ (γ' kann nicht identisch Null sein, da sonst nach (13) $\beta\gamma = 0$ wäre und die Fläche eine Regelfläche sein müßte) und integriert nach t, so hat man

$$\gamma^2 + 2k\gamma - \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\right)^2 = -4a_1 \qquad (a_1 = \text{const}),$$

was auch in der Form

$$\gamma'^2 = \gamma^4 + 2k\gamma^3 + 4a_1\gamma^2 \tag{9.14}$$

geschrieben werden kann. Damit ist der Anschluß an unsere obigen Formeln gewonnen, denn diese Gleichung geht durch Trennen der Veränderlichen und Integration in einen Spezialfall der Gl. (8) über. Die zugehörige Gl. (8.3) hat mindestens $h_1 = 0$ als mehrfache Wurzel und daher gehen bei den hierher gehörenden Flächen nur elementare Funktionen in unsere Parameterdarstellung ein.

Soll eine Fläche zweifache Komplexfläche sein, so muß neben $p = 0$ auch noch $q = 0$ gelten. Da (14) in der Form

$$\beta^2\gamma^2 - \gamma'^2 = (k^2 - 4a_1)\gamma^2 \tag{9.15}$$

Tabelle 4

	k	a_1	a_2	a_3	c
Projektivminimalflächen ($l_1 = 0$)		$a_1 = a_0$			
Flächen mit entartetem Viereck von DEMOULIN (Flächen von GODEAUX-ROZET) ($l = 0$)		$a_1 = a_0$		0	
Flächen von DEMOULIN ($l = m = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = a_0$	$a_2 = -\bar{a}_2 = k(4a_0 - k^2)$	0	
	0	$a_1 = a_0$	$a_2 = \bar{a}_2$		
Einfache Komplexflächen ($p = 0$)			0	0	
Zweifache Komplexflächen ($p = q = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{1}{4}k^2$	0	0	
	0	$a_1 = \bar{a}_1$			
Projektivtransformierte eigentliche Affinsphären ($l = m = 0$, $p = q \neq 0$)	0	$a_1 = a_0$	$a_2 \neq 0$	0	
Projektivtransformierte uneigentliche Affinsphären ($l = m = p = q = 0$)	$k \neq 0$	$a_1 = a_0$	$a_2 = \bar{a}_2 = 0$	0	$c = a_0 = \frac{1}{4}k^2$
	0	$a_1 = a_0$	0	0	

geschrieben werden kann, wozu nun noch die aus $q=0$ entsprechend herzuleitende Gleichung

$$\beta^2\gamma^2-\beta'^2=(k^2-4\bar{a}_1)\beta^2 \tag{9.16}$$

tritt, erkennt man durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen sofort, daß wegen $\beta', \gamma' \neq 0$: $4a_1=4\bar{a}_1$ sein muß. Ist $k\neq 0$, so gilt $4a_1=4\bar{a}_1-k^2$; dann besitzt die Gl. (8.3) zwei Doppelwurzeln und die Parameterdarstellung dieser Flächen ergibt sich durch Einsetzen von w_1, w_2 aus Tabelle 3, Fall 3 in (2.22) und (2.23) bzw. von w_2, w_3 in (2.24). Von diesen Flächen gehören die an zweiter Stelle genannten zu den oben bereits erwähnten projektivtransformierten uneigentlichen Affinsphären. Der andere Fall $k=0$ liefert natürlich die PR-Flächen mit $p=q=0$.

6. Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen

Satz 10. *Die auf Projektivminimalflächen abwickelbaren APR-Flächen gestatten eine Parameterdarstellung, die außer elementaren Funktionen höchstens noch die* Weierstrasssche *σ-Funktion enthält. Explizit erhält man diese Darstellungen, indem man die in Tabelle 3 angegebenen Funktionen w_1, w_2 in die allgemeinen Parameterdarstellungen* (2.22) *oder* (2.23) *und w_2, w_3 in* (2.24) *oder* (2.25) *einsetzt. Indem man dann die Konstanten k, c, a_i wie in der folgenden Tabelle 4 angegeben spezialisiert, erhält man die APR-Flächen, die in die angegebenen spezielleren Flächenklassen gehören.*

Literatur

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2. Berlin 1923. (Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst. 7.) — [2] Bol, G.: Über einen neuen Aufbau der projektiven Flächentheorie. Commentarii Math. Helv. **18**, 129—153 (1945/46). — [3] Bol, G.: Projektive Differentialgeometrie, Teil 1 u. 2. Göttingen 1950—1954. (Studia mathem. 4.9.) [Bd. 1 enthält die §§ 1—73, Bd. 2 die §§ 74—129.] — [4] Bol, G.: Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie. Math. Ann. **122**, 279—295 (1950/51). — [5] Borůvka, O.: Sur certaines Types de surfaces, qui sont projectivement applicables sur elles mêmes. Brünn 1924. (Publications de la Fac. Sci. Univ. Masaryk. 43.) [Tschech., mit franz. Zus.fass.] — [6] Borůvka, O.: Sur les Surfaces projectivement déformables qui admettent un groupe de ∞^1 transformations projectives en elles-mêmes. C. R. Acad. Sci. Paris **189**, 964—966 (1929). — [7] Borůvka, O.: Sur les Surfaces, dont le réseau conjugué de déformation projective est formé par les lignes de Segre-Darboux. Bull. Sci. Math., Sér. 2 **53**, P. 1, 307—320, 324—328 (1929). — [8] Calugareanu, G.: Sur les Surfaces de Tzitzéica, qui sont des surfaces de révolution. Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine **20**, Nr. 7, 31—33 (1938). — [9] Čech, E.: Sur les Surfaces, qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes. Brünn 1924. (Publications de la Fac. Sci. Univ. Masaryk. 40.) — [10] Fubini, G.: Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale. Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 1—46 (1919). — [11] Fubini, G., e E. Čech: Geometria proiettiva differenziale, Bd. 1 u. 2. Bologna 1927. [Bisweilen kurz als „G.P.D." zitiert.] — [12] Fubini, G., et E. Čech: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Paris 1931. — [13] Lie, S.: Bestimmung aller Flächen, die eine kontinuierliche Schar von projektiven Transformationen gestatten. Ber. ü. d. Verh. K. sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. **47**, 209—260 (1895). (Abgedr. in Lie: Ges. Abh. Bd. 6, S. 494—538. Leipzig 1927.) — [14] Tricomi, F.: Elliptische Funktionen [Funzioni

ellittiche, dt.]. Übers. u. bearb. v. M. KRAFFT. Leipzig 1948. (Math. und ihre Anwendungen in Phys. u. Technik. Reihe A, 20.) — [*15*] KAMKE, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Teil 1. Leipzig 1942. (Math. und ihre Anwendungen in Monogr. und Lehrb. 18.) — [*16*] SEGRE, B.: Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili e alle equazioni differenziali ad esse collegate. Roma 1931. (Memorie delle R. Acad. Italia. Classe sci. fis., mat. e nat. 2, mat. 3.) — [*17a, b, e*] SU, B.: On the Theory of surfaces in the affine space. 1.2.5. Jap. J. Math. **5** (1928). 1. Affine moulding surfaces and aff. surf. of revolution, S. 185—210. 2. Generalized aff. mould. surf. and aff. surf. of revolution, S. 211—224. 5. Studies on aff. mould. surfaces, S. 337—343. — [*18*] SU, B.: On a certain Class of surfaces, whose Darboux curves of one system are conics. Tohoku Math. J. **36**, 241—252 (1933). — [*19*] SÜSS, W.: Ein affingeometrisches Gegenstück zu den Rotationsflächen. Math. Ann. **98**, 684—696 (1928). — [*20*] SÜSS, W.: Projektivverwandte der Drehflächen und ihre Segre-Kurven. Tohoku Math. J. **41**, 308—310 (1935/36). — [*21*] TZITZÉICA, G.: Sur une nouvelle Classe de surfaces, P. 2. Rend. Circ. Mat. Palermo **28**, 210—216 (1909).

Göttingen, Rohnsweg 13a

(Eingegangen am 8. August 1956)

Carleson, L.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 447—451 (1957)

Representations of continuous functions

By
Lennart Carleson

1. The problem which will be treated in this paper, can quite generally be stated as follows. Let C be a linear class of continuous functions defined on a set S. Let E be a closed subset of S. Under which conditions on E is *every* continuous function on E the restriction to E of some function belonging to the original class C? We shall in section 3 solve this problem in the case when S is the circle $|z|=1$ and C is the class of uniformly continuous analytic functions in $|z|<1$ and in section 4 we shall consider Fourier-Stieltjes transforms. First, however, we shall in section 2 prove a lemma on Banach spaces to which our theorems can be reduced.

2. Lemma 1. *Let B be a separable* Banach *space with norm $\|x\|$. Let $B_1 \subset B$ be a* Banach *space with the norm $\|x\|_1 \geq \|x\|$. If there exists a sequence of elements x_ν such that for every linear functional $L(x)$ on B*

$$\|L\| \leq M \sup_\nu |L(x_\nu)|, \qquad x_\nu \in B_1, \qquad \|x_\nu\|_1 \leq 1, \tag{1}$$

then

$$B = B_1 \quad \text{and} \quad \|x\|_1 \leq M\|x\|, \qquad x \in B_1. \tag{2}$$

It is obvious that the constant M in (2) cannot in general be improved.

For the proof, we observe that (1) implies that B_1 is dense in B. Since B is separable (see [1], p. 124), there exists a sequence of linear functionals $\{L_\mu\}_1^\infty$ on B, $\|L_\mu\|=1$, such that every linear functional is the weak limit of linear combinations $\sum c_\mu L_\mu$ *).

We now consider the infinite system of equations

$$L_\mu(x) = \sum_1^\infty \xi_\nu L_\mu(x_\nu), \qquad \sum_1^\infty |\xi_\nu| \leq M', \tag{3}$$

for a fixed element $x \in B$, $\|x\|=1$. By a theorem of F. Riesz, (3) has a solution if for every sequence $\{c_\mu\}$

$$\left|\sum c_\mu L_\mu(x)\right| \leq M' \sup_\nu \frac{1}{A_\nu} \left|\sum c_\mu L_\mu(x_\nu)\right|, \tag{4}$$

where $A_\nu \geq 1$ and $\lim A_\nu = \infty$. We shall prove that (4) holds provided that $M' > M$. The opposite assumption implies that for every $n \geq 1$ there exists a linear functional L_n^* such that

$$1 = |L_n^*(x)| \geq M' |L_n^*(x_\nu)|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$|L_n^*(x_\nu)| < \text{const}, \qquad 1 \leq \nu < \infty. \tag{6}$$

*) For the following, compare [2], p. 343.

(6) together with (1) implies that $\|L_n^*\|$ is uniformly bounded. Suppose that $L_{n_i}^*$ converges weakly and let $L(x)$ be the limit. Then, by (5),

$$\|L\| \geq |L(x)| \geq M' |L(x_\nu)|, \qquad 1 \leq \nu < \infty,$$

which implies

$$\|L\| \geq \frac{M'}{M} \|L\|.$$

Hence $L \equiv 0$ which contradicts $L(x) = 1$.

We have thus proved that (3) has a solution if $M' > M$. For such a solution $\{\xi_\nu\}$ we have

$$L_\mu\Big(x - \sum_1^\infty \xi_\nu x_\nu\Big) = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots,$$

and, since L_μ is weakly fundamental, $x = \sum_1^\infty \xi_\nu x_\nu$. Hence

$$\|x\|_1 \leq \sum_1^\infty |\xi_\nu| \|x_\nu\|_1 \leq \sum_1^\infty |\xi_\nu| \leq M',$$

and the proof is complete.

Let us finally note the following well-known converse of the lemma (see [6], p. 30):

If in the lemma we replace (1) *by the assumption* $B = B_1$, *then* (2) *holds for some constant* M.

3. Let C denote the class of functions $f(z)$ analytic and uniformly continuous in $|z| < 1$. Under the norm $\sup_{|z|<1} |f(z)|$, C is a separable BANACH space. An example of a basis is given by the powers z^n. If E is a closed set on $|z| = 1$, then there exists a non-trivial function $f(z) \in C$, which vanishes on E, if and only if $mE = 0$ (compare below, lemma 2). We shall now prove that this is also the solution of the problem, stated in the introduction.

Theorem 1. *Let E be a closed set on $|z| = 1$ of measure zero and let $\varphi(z)$ be continuous on E. Then there exists a function $f \in C$ with $f(z) = \varphi(z)$ on E. If $mE > 0$, this is not true for every choice of $\varphi(z)$.*

The last statement of the theorem is trivial. If $mE > 0$, we choose $\varphi_1(z)$ and $\varphi_2(z)$ so that $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ on a set of positive measure but not everywhere. If $f_1(z)$ and $f_2(z)$, corresponding to φ_1 and φ_2 existed, $f_1 - f_2$ would vanish on a set of positive measure and hence everywhere, contradicting our assumption $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$.

In the proof, we shall use the following lemma.

Lemma 2. *Let E_1 and E_2 be two disjoint closed sets on $|z| = 1$ of measure zero. Then there exists a function $f(z) \in C$ with the properties*

$$f(z) = 1, \qquad z \in E_1, \tag{7}$$

$$f(z) = 0, \qquad z \in E_2, \tag{8}$$

$$|f(z)| \leq 2, \qquad |z| \leq 1. \tag{9}$$

Let $h(\vartheta)$ be a continuous function with period 2π satisfying the following conditions: (a) $0 \leq h(\vartheta) \leq 1$; (b) $h(\vartheta) = 0$, $e^{i\vartheta} \in E_1$; (c) $h(\vartheta) = 1$, $e^{i\vartheta} \in E_2$; (d) $h''(\vartheta)$ is continuous; (e) $\int_{-\pi}^{\pi} \log h(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$. It is obvious that such a function exists. If then

$$\log g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \log h(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{10}$$

it follows that $|g(e^{i\vartheta})| = h(\vartheta)$ and that g belongs to C. This is a consequence of (b) and (d). Furthermore, by (b), $g(z) = 0$ on E_1, by (d) $|g(z)| = 1$ on E_2 and by (a) $|g(z)| < 1$, $|z| < 1$. Under the mapping $w = g(z)$, the set E_2 is mapped on a set E_2' of measure zero, since $g'(z)$, by the regularity (d) of $h(\vartheta)$, is continuous on E_2. In the same way as above we construct a function $q(z) \in C$ such that $q(0) = 1$, $q(z) = 0$ on E_2' and $|q(z)| \leq 2$, $|z| \leq 1$. The function $q(g(z)) = f(z)$ belongs to C and has the desired properties (7), (8), (9).

Let E be the given closed set of measure zero and divide E in all possible ways into two disjoint closed subsets E_1 and E_2. As is easily seen, this is possible only in a countable number of different ways. For each choice, we construct by lemma 2 a function $f(z)$. We obtain a sequence of elements $\{f_\nu(z)\}_1^\infty$ of C, $|f_\nu| \leq 2$.

In order to be able to apply lemma 1, we introduce as BANACH space B the set of continuous functions φ on E under uniform norm $\|\varphi\|$ and as B_1 the restriction to E of functions $f(z) \in C$ with norm

$$\|\varphi\|_1 = \inf_f \sup_z |f(z)|, \qquad f(z) = \varphi(z) \text{ on } E.$$

It is obvious that B_1 is complete under this norm. If $\|\varphi\|_1 \leq M\|\varphi\|$, theorem 1 follows if we observe that the set of polynomials is dense in B.

In lemma 1 we now choose $x_\nu = \frac{1}{2} f_\nu(z)$ and want to prove that for every μ of bounded variation on E

$$m \int_E |d\mu| \leq \sup_\nu \left| \int_E f_\nu(z)\, d\mu(z) \right| \tag{11}$$

with $m > 0$ independant of μ. Since f_ν is real on E we may assume that μ is real and we also assume that the right hand side of (11) $= 1$. Let $A \subset E$ be a BOREL measurable set. Then there is a sequence $\{f_{\nu_i}(z)\}$ such that

$$\lim_{i=\infty} f_{\nu_i}(z) = \begin{cases} 1 & \text{on } A \\ 0 & \text{on } E - A \end{cases}$$

except on sets of variation zero for μ. Hence

$$|\mu(A)| = \left| \lim_{i=\infty} \int_E f_{\nu_i}(z)\, d\mu(z) \right| \leq 1$$

and since ([7], p. 32)

$$\int_E |d\mu| = \sup_{A \subset E} \mu(A) - \inf_{A \subset E} \mu(A) \leq 2,$$

the proof is complete.

It is interesting to observe that theorem 1 contains the following well-known theorem of F. and M. RIESZ:

If

$$\int_{|z|=1} z^n \, d\mu(z) = 0, \qquad n \geqq 0,$$

then μ is absolutely continuous.

The proof obtained in this way can be considered as more "natural" than the classical proofs, since it is a direct proof of absolute continuity. Compare also [5].

Let E be a closed set of measure zero and assume $m = \int_E |d\mu| > 0$. By the remark at the end of section 2 and theorem 1, every continuous $\varphi(z)$, $|\varphi| \leqq 1$, on E can be represented by $f \in C$, $|f| \leqq M$. Let $O \supset E$ be an open set such that $\int_{O-E} |d\mu| < \varepsilon$ and construct by the formula (10) $g(z) \in C$ so that $|g(z)| = 1$ on E; $|g(z)| \leqq 1$, $|z| \leqq 1$; $|g(z)| < \varepsilon$, $|z| = 1$ and z outside O. Then

$$\int_{|z|=1} z^n g(z) \, d\mu(z) = 0$$

and

$$m = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_E \varphi(z) \, g(z) \, d\mu(z) \leqq M \int_{O-E} |d\mu| + M \varepsilon \int_{|z|=1} |d\mu| \leqq \tfrac{1}{2} m$$

for ε sufficiently small. This contradiction proves the theorem.

4. We now assume that E is a compact set on $(-\infty, \infty)$ and we consider the problem of representing continuous function $\varphi(x)$ on E by FOURIER-STIELTJES transforms

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \, d\sigma(t), \qquad x \in E. \tag{12}$$

Lemma 1 here gives the following criterion on E.

Theorem 2. *A necessary and sufficient condition on E that every continuous $\varphi(x)$ has a representation* (12) *is that*

$$\sup_t \left| \int_E e^{ixt} \, d\mu(x) \right| \geqq m \int_E |d\mu|, \tag{13}$$

where $m > 0$ is independent of μ.

Let B_1 be the set of functions of the form (12) and

$$\|\varphi\|_1 = \inf_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma| \quad \text{for such } \sigma.$$

If (12) holds for every φ, then $\|\varphi\|_1 \leqq M \|\varphi\|$, and

$$\int_E |d\mu| = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_E \varphi \, d\mu \leqq \sup_{\sigma} \int_E d\mu(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \, d\sigma(t), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma| \leqq M,$$

whence

$$\int_E |d\mu| \leqq \sup_t \left| \int_E e^{ixt} \, d\mu(x) \right| \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma|,$$

and (13) holds with $m = \frac{1}{M}$.

To prove the converse, choose in lemma 1 $x_\nu = e^{i r_\nu}$, where r_ν is dense on $(-\infty, \infty)$. Assumptions (1) and (13) are identical, and $B = B_1$ is the desired result.

Finally we note that we may, if (13) holds, choose σ in (12) in very special ways.

Theorem 3. *If every $\varphi(x)$ has a representation* (12) *and E is a subset of $(-\pi, \pi)$, then $\varphi(x)$ can also be represented in the form*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i x t} f(t)\, dt, \qquad f \text{ summable}, \tag{14}$$

or

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i n x}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{15}$$

Consider the subspace B_1 of functions of the form (14) under the norm

$$\|\varphi\|_1 = \inf_f \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

We choose in lemma 1 as the set $\{x_\nu\}$ the functions

$$\varphi_{\nu k} = e^{i r_\nu x} \cdot \frac{k}{x} \cdot \sin \frac{x}{k}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots,$$

where, as before, $\{r_\nu\}$ denotes a dense set on $(-\infty, \infty)$. Since (13) holds, by assumption, it follows that

$$\sup_{\nu, k} \left| \int_E \varphi_{\nu k}(x)\, d\mu(x) \right| \geq m \int_E |d\mu|,$$

whence, by lemma 1, $B = B_1$.—The result can naturally easily be proved directly.

To prove (15), we introduce in an obvious way $\|\varphi\|_1$ and assume that there exists a function μ such that

$$\int_E |d\mu| = 1 \qquad \text{while} \qquad \left| \int_E e^{i n x} d\mu(x) \right| \leq \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

By a theorem of M. CARTWRIGHT [3], there is a constant C, depending only on E, such that

$$\left| \int_E e^{i t x} d\mu(x) \right| \leq C \varepsilon, \qquad -\infty < t < \infty,$$

which is impossible if $\varepsilon < \frac{m}{C}$. We can thus again apply lemma 1 and the proof is complete.

References

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa-Lwow 1932. — [2] CARLESON, L.: Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle. Acta math. **87**, 325—345 (1952). — [3] CARTWRIGHT, M.: On certain integral functions of order 1. Quart. J. of Math. **7**, 46—55 (1936). — [4] HELSON, H.: Fourier transforms on perfect sets. Studia math. **14**, 209—213 (1954). — [5] HELSON, H.: On a theorem of F. and M. RIESZ. Colloquium math. **3**, 113—117 (1955). — [6] HILLE, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. New York 1948. — [7] SAKS, S.: Theory of the integral. Warszawa-Lwow 1937.

Uppsala (Schweden), Uppsala Universitets Matematiska Institution

(Eingegangen am 24. April 1956)

Foster, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 452—469 (1957)

The generalized Chinese remainder theorem for universal algebras; subdirect factorization

By
Alfred L. Foster

1. Introduction

In a recent phase of a series of studies dedicated to a broad-scale extension of classical Boolean theory to more general domains (Foster [*1*] to [*4*] [1]), see also §§ *7* and 8 below), particular attention has been focused on certain classes $\mathfrak{P} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ - called "primal clusters" — of functionally complete universal algebras, $\mathfrak{P}_i$ (of preassigned species). Each such cluster, $\mathfrak{P}$, equationally defines — in terms of the identities jointly satisfied by the various finite subsets of $\mathfrak{P}_i \in \mathfrak{P}$ — a class of "$\mathfrak{P}$-algebras". For $\mathfrak{P}$-algebras an ideal- (or equivalently a subdirect-) structure theory was established, a theory which, in particular, embraces familiar results of the theory of (i) Boolean rings, (ii) p-rings, (iii) Post algebras, etc., for appropriately chosen single-algebra clusters $\mathfrak{P}$. The subdirectly irreducible factors of a $\mathfrak{P}$-algebra are certain $\mathfrak{P}_i \in \mathfrak{P}$, and these factors were moreover shown to be unique within $\mathfrak{P}$. Thus each enlargement of a given cluster $\mathfrak{P}$ carries with it an enlargement of the range of the above unicity.

The horizon of application of this extended "Boolean" theory depends in considerable measure on the discovery of comprehensive clusters of universal algebras, preferably as embrasive as possible. In [*3*] the existence of a rather large primal cluster, K', was established — one which, in particular, subsumes all of the familiar systems (i) to (iii) above. In the present communication we propose to enlarge this aspect of the theory. As a principal result, we shall, in particular, establish the existence of a primal cluster $K \supset K'$, where K will consist of the totality of non-isomorphic functionally complete algebras of a given (arbitrary) species, subject to a single restrictive condition.

2. Some fundamentals; Chinese residue condition

Let $Sp \quad (n_1, n_2, \ldots)$ be a given (finitary) species, — the n_i being positive integers, and let $\mathfrak{o}_1(\xi, \ldots), \mathfrak{o}_2(\xi, \ldots), \ldots$ denote the primitive operation symbols of this species, where $\mathfrak{o}_i$ is n_i-ary,

$$\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_i}).$$

An *expression* $\Phi(\xi, \ldots)$ of species Sp is one or more indeterminate symbols $\xi, \ldots$ composed via the operation symbols $\mathfrak{o}_i$.

[1]) Here and throughout, [*1*] to [*4*] refer to the Bibliography.

In the various universal algebras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ of species Sp we shall usually employ the same symbols $\mathfrak{o}_i, \ldots$ to denote the respective primitive operations, e.g.,

$$\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots), \quad \mathfrak{B} = (B, \mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots), \quad \text{etc.}$$

Thus in each $\mathfrak{A}$ the primitive expressions $\mathfrak{o}_i(\xi, \ldots)$, and more generally each expression $\Phi(\xi, \ldots)$, "becomes" a particular $\mathfrak{A}$-function, which we denote by

$$\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}}, \quad \text{or} \quad \Phi(\xi, \ldots) \quad (\mathfrak{A}).$$

For distinct algebras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, a given expression $\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}}$ will in general designate an entirely different function from $\Phi(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{B}}$.

In a similar way the notation

$$\Phi = \Psi \pmod{\mathfrak{A}}, \quad \text{also written } \Phi \equiv \Psi \pmod{\mathfrak{A}} \tag{2.1}$$

denotes that (2.1) is an identity of the algebra $\mathfrak{A}$, when the expressions Φ, Ψ are conceived mod $\mathfrak{A}$[2]).

Unless otherwise specified the species Sp will hereafter be arbitrary but fixed. Whenever we speak of expressions or algebras we shall automatically mean: of species Sp.

Let $\{\mathfrak{A}_i\} = \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ be a finite set (sequence) of algebras. We shall say that $\{\mathfrak{A}_i\}$ satisfies the *Chinese residue condition* or, more briefly, that $\{\mathfrak{A}_i\}$ is an *independent* class of algebras if, corresponding to each set (sequence) of expressions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ there exists (at least one) expression Ξ such that

$$\Xi = \Phi_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, r).$$

From [3] we recall the readily established

Theorem 2.1. *A necessary and sufficient condition for algebras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ to be independent is that there exist an expression $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ such that*

$$K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \xi_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, r).$$

3. Identities

Let $\mathfrak{A}$ be any algebra and $\mathring{1}$ the one-element algebra (of species Sp). Let $|\mathfrak{A}|$ denote the class of (strict) identities[3]) satisfied by $\mathfrak{A}$. For $\mathring{1}$ we also abbreviate

$$|\mathring{1}| = \bar{1}.$$

Thus $\bar{1}$ consists of the class of all possible equations of species Sp: $\Phi = \Psi \in \bar{1}$ for all expressions Φ, Ψ.

[2]) Such an identity $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$ is also called a *strict* identity of $\mathfrak{A}$, — indicating that indeterminates alone (i.e., no constants, = fixed elements of $\mathfrak{A}$) occur (see [3]). In the present paper "identity" always means strict identity.

[3]) See previous footnote.

We establish slight contact with $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(Sp)$, the lattice of all logically closed subsets of $\overline{1}$; here, for $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \in \mathfrak{E}$,

$glb(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2 =$ ordinary intersection of the classes $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$.

$lub(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2 =$ logical closure of the union of the classes $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$.

Of course

$$\overline{1} \cap \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1, \quad \overline{1} \cup \mathfrak{E}_1 = \overline{1}.$$

Since $|\mathfrak{A}|$ is automatically logically closed we have

$$|\mathfrak{A}| \in \mathfrak{E}.$$

If $\times$ denotes direct product, it is readily seen that

$$|\mathfrak{A}_1| \cap |\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2|, \tag{3.1}$$

with a similar formula holding for arbitrarily many algebras $\mathfrak{A}_i$. However there is no counterpart of (3.1) for $|\mathfrak{A}_1| \cup |\mathfrak{A}_2|$.

Definition. We say that $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \in \mathfrak{E}$ are *e(quationally)-relatively prime* if $\mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2 = \overline{1}$.

Theorem 3. *If $\{\mathfrak{A}_i\}$ is an independent class of algebras then*

(3.2) *any subset of the $\mathfrak{A}_i$ are independent,*

(3.3) *the $\mathfrak{A}_i$ are pairwise e-relatively prime.*

Proof. (3.2) is a trivial consequence of the definition of independence. As for (3.3), let $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}$ be any distinct $\in \{\mathfrak{A}_i\}$. By (3.2), $\mathfrak{A}_{i_1}$ and $\mathfrak{A}_{i_2}$ are independent, whence, for arbitrary expressions Φ_1, Φ_2 there exists a corresponding expression Ξ such that

$$\Xi = \Phi_1 \ (\mathfrak{A}_{i_1}), \quad \Xi = \Phi_2 \ (\mathfrak{A}_{i_2}).$$

Both of these identities then belong to the union of $|\mathfrak{A}_{i_1}|$ and $|\mathfrak{A}_{i_2}|$ and therefore also to the logical closure of this union,

$$\Xi = \Phi_1, \quad \Xi = \Phi_2 \quad \in |\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|.$$

Because of the logical closure of $|\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|$ it then further follows that $\Phi_1 = \Phi_2 \in |\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}|$. Since Φ_1, Φ_2 are perfectly arbitrary expressions, the desired conclusion follows, namely,

$$|\mathfrak{A}_{i_1}| \cup |\mathfrak{A}_{i_2}| = \overline{1}.$$

4. Chinese residue theorem

The relation of §§ 2, 3 to the classical Chinese residue theorem is seen as follows. Let us say that $\{a_i\} = a_1, a_2, \ldots, a_r$, a set of rational integers $(a_i \neq 0, \neq 1)$ satisfies the Chinese residue condition — or is independent — if, corresponding to each set $\{s_i\} = s_1, s_2, \ldots, s_r$ of integers there exists an integer x such that

$$x \equiv s_i (a_i) \qquad (\text{for } i = 1, 2, \ldots, n).$$

This "elementary" independence is here equivalent to the independence of the algebras $\mathfrak{W}_{a_i}$, the residue class ring mod a_i. One may readily establish

Theorem 4.1. *The following conditions are pairwise equivalent.*

(i) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *are independent.*

(ii) $\mathfrak{W}_{a_1}, \mathfrak{W}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ *are independent.*

(iii) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *are pairwise relatively prime.*

(iv) $\mathfrak{W}_{a_1}, \mathfrak{W}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ *are pairwise e-relatively prime.*

A similar theorem may indeed be established for classes of proper homomorphic images of any principal ideal domain. However in more general rings- and *a-fortiori* in arbitrary universal algebras — the general notion of independence of algebras no longer possesses such a simple elementary counterpart.

In theorem 4.1 one half of the equivalence of (ii) and (iv) — namely (ii) implies (iv) — is valid for arbitrary universal algebras (theorem 3); the converse implication, however, is generally false as is seen from the following two algebras $\mathfrak{F} = (F, \times, ^\circ)$ and $\mathfrak{G} = (G, \times, ^\circ)$, of species (2.1), where $F = \{0, 1, 2\}$, $\xi \times \eta =$ product mod 3, $\xi^\circ = 1 + \xi$, mod 3; $\mathfrak{G}$ = free algebra of one generator defined by the identities

$$\begin{cases} x \times (y \times z) = (x \times y) \times z \\ x^5 = x^2. \end{cases} \tag{4.1}$$

We show that $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ are e-relatively prime but not independent. $\mathfrak{F}$ is a primal algebra (functionally strictly complete) and $|\mathfrak{F}|$ is maximal in $\bar{1}$ (see [3], also § 8). From this together with the observation that the last of the equations (4.1) is not an identity of $\mathfrak{F}$, it follows that $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ are e-relatively prime,

$$|\mathfrak{F}| \cup |\mathfrak{G}| = \bar{1}.$$

On the other hand there exists no expression Ξ such that

$$\Xi = \xi^2(\mathfrak{F}),$$
$$\Xi = \xi(\mathfrak{G}),$$

whence $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{G}$ are not independent. This is evident since the only expression Ξ' such that $\Xi' = \xi(\mathfrak{G})$ is the expression ξ itself; but $\xi \neq \xi^2(\mathfrak{F})$. The proof is thus complete.

5. *Frames; co-framal algebras*

By a *frame* (or frame algebra) $\mathfrak{S} = (S, \times, ^\circ; 0, 1)$ we mean an algebra of species (2,1) possessing distinguished elements 0, 1 such that

(1) $$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0, \quad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \qquad (\xi \in S),$$

(2) ξ° is a cyclic permutation of the set S (whose inverse we denote by $\xi^\cup$),

(3) $$0^\circ = 1.$$

If we delete the restriction "cyclic" in (2) we speak of a *weak* frame. In a frame (but not necessarily in a weak frame), S must be denumerable.

Lemma 5.1. *Let* $\mathfrak{S}_1=(S_1, \times, {}^{\cap}; 0_1, 1_1)$, $\mathfrak{S}_2=(S_2, \times, {}^{\cap}; 0_2, 1_2)$ *be two weak frames. If there exists an expression* $|'(\xi)$ *such that*

$$|'(\xi) \begin{cases} \equiv 1_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \equiv 0_2 \pmod{\mathfrak{S}_2}, \end{cases} \tag{5.1}$$

then there also exists an expression $|''(\xi)$ *such that*

$$|''(\xi) \begin{cases} \equiv 0_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{S}_2}, \end{cases} \tag{5.2}$$

and $\mathfrak{S}_1$ *and* $\mathfrak{S}_2$ *are independent.*

Proof. Let

$$|''(\xi) = \text{def} = [|'(\xi) \times \{|'(\xi)\}^{\cup_2}]^{\cap}. \tag{5.3}$$

Using (5.1) it is easily verified that (5.3) has the desired property (5.2). Let now $\Phi_1(\xi, \ldots)$, Φ_2 be any expressions [of species (2.1)]. Then corresponding to these let the expression $\Xi(\xi, \ldots)$ be defined by:

$$\Xi(\xi, \ldots) = \text{def} = \{|'(\xi) \times \Phi_1(\xi, \ldots)\} \times_{\cap} \{|''(\xi) \times \Phi_2(\xi, \ldots)\}, \tag{5.4}$$

where

$$\xi \times_{\cap} \eta = \text{def} = (\xi^{\cap} \times \eta^{\cap})^{\cup}. \tag{5.5}$$

It is then readily verified that

$$\Xi(\xi, \ldots) = \begin{cases} \Phi_1(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}_1} \\ \Phi_2(\xi, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}_2}. \end{cases}$$

Thus $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ are independent and the lemma is complete.

For the residue class rings $\mathfrak{W}_{a_i}$ (§ 4) the independence of the algebras $\mathfrak{W}_{a_i}, \ldots, \mathfrak{W}_{a_r}$ is a consequence of their pairwise independence. While no corresponding result for arbitrary universal algebras is at hand, we have the

Theorem 5.2. *Let* $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_r$ *be a set (sequence) of weak frames*

$$\mathfrak{S}_i = (S_i, \times, {}^{\cap}; 0_i, 1_i).$$

If there exist $\left(\frac{r(r-1)}{2}\right)$ *expressions* $|_{i_j}(\xi)$ *such that*

$$|_{i_j}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j) \end{cases} \quad (1 \leq i < j \leq r), \tag{5.6}$$

then there also exist r *expressions* $|_i(\xi)$ *such that*

$$|_i(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j), \quad \textit{for all } j \neq i; \end{cases} \tag{5.7}$$

and the algebras $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_r$ *are independent.*

Proof. By lemma 5.1 the $\mathfrak{S}_i$ are pairwise independent and there exist expressions $|_{ij}(\xi)$ such that

$$|_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i(\mathfrak{S}_i) \\ \equiv 0_j(\mathfrak{S}_j) \end{cases} \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.8}$$

Let r expressions $|_i(\xi)$ be defined by

$$|_i(\xi) = \text{def} = |_{i1}(\xi) \times |_{i2}(\xi) \times \cdots \times |_{ir}(\xi) \quad (\text{no } |_{ii} \text{ term}), \tag{5.9}$$

and where we understand the $\times$ factors in (5.9) to be associated from the left. These $|_i(\xi)$ are easily verified to possess the desired property (5.7). To prove the independence of $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_r$ let $\times_\circ$ again be defined as the $^\circ$-transform of $\times$, by (5.5). Let now $\Phi_1(\xi, \ldots), \Phi_2, \ldots, \Phi_r$ be arbitrary expressions and let $\Xi(\xi, \ldots)$ correspondingly be defined by

$$\Xi(\xi, \ldots) = \{\Phi_1(\xi, \ldots) \times |_1(\xi)\} \times_\circ \{\Phi_2(\xi, \ldots) \times |_2(\xi)\} \times_\circ \cdots \times_\circ \{\Phi_r \times |_r(\xi)\}$$

where the $\times_\circ$ factors, $\{\ \}$, are also associated from the left. It is now readily seen that

$$\Xi(\xi, \ldots) \begin{cases} \equiv \Phi_1 \pmod{\mathfrak{S}_1} \\ \quad \vdots \\ \equiv \Phi_r \pmod{\mathfrak{S}_r}, \end{cases}$$

whence the $\mathfrak{S}_i$ are independent and the theorem is complete.

Definition. A class $\{\mathfrak{A}_i\}$ of universal algebras, of species Sp, is called *coframal* if there exist: two expressions $\times, ^\circ$ (of species Sp) and, in each $\mathfrak{A}_i$, distinguished elements $0_i, 1_i$, such that

$$(A_i, \times, ^\circ; 0_i, 1_i) \quad \text{is a frame for each index } i. \tag{5.10}$$

Here A_i is the class of elements of $\mathfrak{A}_i$. The algebras (5.10) are then called a class of *coframes* of the $\{\mathfrak{A}_i\}$. The concept *weakly*-coframal is similarly defined. A class of algebras is *naturally* coframal if two expressions, $\times, ^\circ$, satisfying (5.10), already exist among the primitive operations; in particular all frame algebras are of course naturally coframal.

The results of this section may now be translated to yield

Theorem 5.3. *Let $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ be a set (sequence) of weakly coframa algebras, of species Sp, and let* (5.10) *be a set of weak coframes. If there exist* $\frac{r(r-1)}{2}$ *expressions $|_{ij}(\xi)$ satisfying*

$$|_{ij}(\xi) \begin{cases} \equiv 1_i \pmod{\mathfrak{A}_i} \\ \equiv 0_j \pmod{\mathfrak{A}_j} \end{cases} \quad (\text{for } 1 \leq i < j \leq r),$$

then the algebras $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ are independent.

6. Co-constant elements

For subsequent use we further require a certain relation between elements of algebras. Let $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$, $\mathfrak{B} = (B, o, \ldots)$ be universal algebras of the

same species, Sp. Elements $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$ are said to be *co-constant*, in symbols

$$\alpha \sim \beta \tag{6.1}$$

if there exists a unary expression $\Phi(\xi)$ such that

$$\begin{cases} \Phi(\xi) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{A}} \\ \Phi(\xi) \equiv \beta \pmod{\mathfrak{B}}. \end{cases} \tag{6.2}$$

We also write (6.2) in the form

$$\alpha \sim \beta \ (\Phi).$$

Lemma 6. *Let* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathfrak{A}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ *be such that*

$$\alpha_1 \sim \beta_1, \qquad \alpha_2 \sim \beta_2, \ldots$$

and let $\Psi(\xi, \eta, \ldots)$ *be any expression. Then*

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \sim \Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots).$$

Proof. By hypothesis there exist expressions $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$, ... such that

$$\Phi_1(\xi) \begin{cases} \equiv \alpha_1 (\mathfrak{A}) \\ \equiv \beta_1 (\mathfrak{B}), \end{cases} \qquad \Phi_2(\xi) \begin{cases} \equiv \alpha_2 (\mathfrak{A}) \\ \equiv \beta_2 (\mathfrak{B}), \ldots. \end{cases}$$

Given an expression $\Psi(\xi, \eta, \ldots)$, define

$$\Phi(\xi) = \text{def} = \Psi\big(\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi), \ldots\big).$$

Then clearly

$$\Phi(\xi) \begin{cases} \equiv \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \pmod{\mathfrak{A}} \\ \equiv \Psi(\beta_1, \beta_2, \ldots) \pmod{\mathfrak{B}}, \end{cases}$$

and the lemma is proved.

7. *Primal algebras: $\mathfrak{P}$-algebras and their structure*

In this and the following section we abstract a number of pertinent notions and results taken from [1] to [4].

A universal algebra $\mathfrak{A} = (A, \circ, \ldots)$, of species Sp, is *functionally strictly complete* (f.s.c.) if each mapping from $A \times A \times \cdots$ to A may be expressed in the algebra, i.e., if: for each positive integer k and for each mapping $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ of the set $A^{(k)}$ $(= A \times A \times \cdots = k^{\text{th}}$ Cartesian power) into the set A, there exists at least one expression $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ of species Sp, such that

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Trivially $\mathring{1}$, the one-element algebra (of species Sp), is always f.s.c. An algebra $\mathfrak{P} = (P, \circ, \ldots)$ is called *primal* if it is f.s.c. and $\neq \mathring{1}$. The profusion of known primal algebras includes the following:

(i) The two-element Boolean algebra, $(F_2, \times, ^c)$ ($\times$ = intersection, ^{c} = complement).

More generally

(ii) The prime-field $(F_p, \times, ^\circ)$, p = prime. Here $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, $\times$ = ordinary product, $\xi^\circ = 1 + \xi \pmod p$.

(iii) The basic Post algebra $(P_n, \times, ^\circ)$, n arbitrary. Here

$$P_n = \{0, \varrho_{n-2}, \varrho_{n-1}, \ldots, \varrho_1, 1\},$$

$\xi \times \eta = \min(\xi, \eta)$ — where "min" refers to the above ordering — and

$$\xi^\circ = \text{def}: \; 0^\circ = 1, \; 1^\circ = \varrho_1, \varrho_1^\circ = \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-2}^\circ = 0.$$

(iv) The "n-field" $(\mathfrak{F}_n, \times, ^\circ)$, n-arbitrary. Here $\mathfrak{F}_n = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-2}\}$, $\mathfrak{F}_n' = \mathfrak{F}_n$ less 0, $(\mathfrak{F}_n', \times)$ = cyclic group of order $n-1$, $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ $(\xi \in \mathfrak{F})$, and $\xi^\circ = \text{def}$: $0^\circ = 1$, $1^\circ = \alpha$, $\alpha^\circ = \alpha^2, \ldots, (\alpha^{n-2})^\circ = 0$. More generally

(v) $(G_n, \times, ^\circ)$, n arbitrary. Here $G_n = \{0, 1, \alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$, $G_n' = G_n$ less 0, $(G_n', \times)$ = arbitrary (finite) group, $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ $(\xi \in G)$, and $\xi^\circ = \text{def}$: $0^\circ = 1$, $1^\circ = \alpha$, $\alpha^\circ = \beta, \ldots, \gamma^\circ = 0$. More generally

(vi) $(L_n, \times, ^\circ)$, n arbitrary. Here $L_n = \{0, 1, \alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$, $L' = L$ less 0, $(L', \times)$ = arbitrary closed multiplicative system (neither necessarily associative nur commutative) with identity, $1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi$ $(\xi \in L')$ and such that the product of all elements of L' — in some order and association — is $= 1$; $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ $(\xi \in L)$, and $\xi^\circ = \text{def}$: $0^\circ = 1$, $1^\circ = \alpha$, $\alpha^\circ = \beta, \ldots, \gamma^\circ = 0$.

A further extension of (vi) is given by the following unpublished result, the proof of which we shall however not here present. A *binary algebra* $(B, \times)$ is simply an algebra of species (2) with a zero and an identity.

Theorem 7.1. *Let $(B, \times)$ be a finite binary algebra. Then there exists a cyclic permutation ξ° of the class B such that the algebra $(B, \times, ^\circ)$ [of species (2,1)] is a primal algebra. Moreover with the single exception of the four-element binary algebra*

$\times$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	α	0
β	0	β	0	β

there exists a cyclic permutation ξ of B, further satisfying the normalizing condition

$$0^\circ = 1,$$

such that $(B, \times, ^\circ)$ is primal.

Definition. Let $\mathfrak{P}$ be a primal algebra (of species Sp). By a $\mathfrak{P}$-*algebra* — or an algebra with *kernel* $\mathfrak{P}$ — we mean an algebra $\mathfrak{A}$ (of species Sp) satisfying all identities of $\mathfrak{P}$, i.e.,

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}|.$$

Since $|\mathfrak{P}|$ is maximal in $\bar{1}$ (§ 8; also [3]), an equivalent definition is:

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}| \quad \text{or} \quad \mathfrak{A} \cong \mathring{1} \quad (= \text{one-element algebra}).$$

From [2] we further have

Theorem 7.2. *Let $\mathfrak{P}$ be a primal algebra. Then the following classes of algebras are pairwise equivalent (up to isomorphisms):*

(1°) *The class of all $\mathfrak{P}$ algebras.*

(2°) *The class of all subdirect powers of $\mathfrak{P}$.*

(3°) *The class of all subalgebras of direct powers of $\mathfrak{P}$.*

A finite $\mathfrak{P}$-algebra is furthermore isomorphic with a direct power of $\mathfrak{P}$.

The familiar structure of Boolean algebras, p-rings and Post algebras are special instances of theorem 7.2, for $\mathfrak{P} = (F_2, \times, \hat{})$, $\mathfrak{P} = (F_p, \times, \hat{})$ and $\mathfrak{P} = (P_n, \times, \hat{})$ respectively (§ 7).

8. *Primal clusters; $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebras and their structure*

Definition. A *primal cluster* of species Sp is a class $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ of primal algebras, of species Sp, any finite subset of which is independent.

Obviously a single primal algebra and more generally each finite class of independent primal algebras is a primal cluster. Moreover, with $\tilde{\mathfrak{P}}$, each subset of $\tilde{\mathfrak{P}}$ is a primal cluster. It was further shown in [3] that each of the following is a primal cluster:

(a) the class of all prime-fields $\{F_2, F_3, \ldots, F_p, \ldots\}$, $F_p = (F_p, \times, \hat{})$,

(b) the class of all n-fields $\{\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots\}$, $\mathfrak{F}_n = (\mathfrak{F}_n, \times, \hat{})$,

(c) the class of all basic Post algebras $\{P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots\}$, $P_n = (P_n, \times, \hat{})$.

Also

(d) $\{\mathfrak{F}_2, F_3, \mathfrak{F}_3, F_4, \ldots, F_n, \mathfrak{F}_n, \ldots\}$, the union of the primal clusters (b), (c) above.

Anticipating, it will further follow from theorem 10.7 that the following class is a primal cluster [which subsumes all of the above (a) to (d)],

(e) the class of all (non-isomorphic) primal algebras furnished by theorem 7.1.

Let $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ be a primal cluster (species Sp), and $\mathfrak{A}$ an algebra (species Sp).

Definitions.

(I) $\mathfrak{A}$ is said to be a $\tilde{\mathfrak{P}}$-*algebra* if for some finite subset $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ satisfies all identities common to $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$, i.e.,

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}|. \tag{8.1}$$

If we write

$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r} \quad (\times = \text{direct product}),$$

an equivalent condition is:

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}^*|. \tag{8.2}$$

We further note that if $\tilde{\mathfrak{P}}$ is a finite cluster, $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n\}$, $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra if and only if

$$|\mathfrak{A}| \geqq |\mathfrak{P}_1| \cap |\mathfrak{P}_2| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_n| = |\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_n| . \tag{8.3}$$

(II) 1. $\mathfrak{A}$ is said to be *(subdirectly) representable* in $\tilde{\mathfrak{P}}$ if for some finite subset $\mathfrak{P}_{j_1}, \mathfrak{P}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ is isomorphic with a suitable subdirect product of suitable subdirect powers of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$, respectively.

2. If for some $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{A}$ is isomorphic with the direct product of suitable subdirect (respectively of suitable direct) powers of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$, then $\mathfrak{A}$ is said to be *semi-directly* (respectively *directly*) representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.

(III) 1. $\mathfrak{A}$ is said to possess $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r} \in \tilde{\mathfrak{P}}$ as a minimal set of *eq-factors* (= equationally defined factors) in $\tilde{\mathfrak{P}}$, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ satisfy (8.1) — or equivalently, (8.2) — and if for each proper subset $\mathfrak{P}_{i_1'}, \mathfrak{P}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_k'}$ of $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$: $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_k'}$ fail to satisfy (8.1).

2. $\mathfrak{A}$ is said to possess $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s} \in \tilde{\mathfrak{P}}$ as a minimal set of *sd-factors* (= subdirect factors) in $\tilde{\mathfrak{P}}$, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$ satisfy (II, 1) and if for each proper subset $\mathfrak{P}_{j_1'}, \mathfrak{P}_{j_2'}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_k'}$ of $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$: $\mathfrak{A}, \mathfrak{P}_{j_1'}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_k'}$ fail to satisfy (II, 1)

The fundamental theorem of primal clusters then asserts (see [3]).

Theorem 8.1.

(1°) *Let $\tilde{\mathfrak{P}}$ be a primal cluster. Then the following classes of algebras are pairwise co-extensive, up to isomorphisms:*

(i) *The class of all $\tilde{\mathfrak{P}}$ algebras.*

(ii) *The class of all algebras subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(iii) *The class of all algebras semi-directly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(iv) *The class of all subalgebras of algebras which are subdirectly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.*

(v) *The class of all homomorphic images of algebras which are subdirectly represented in $\tilde{\mathfrak{P}}$*[4]).

Moreover a finite $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra is directly representable in $\tilde{\mathfrak{P}}$.

(2°) *If $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra and $\mathfrak{A} \not\cong \mathring{1}$ (= one-element algebra), then $\mathfrak{A}$ possesses a unique set of minimal eq-factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, and a unique set of minimal sd-factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$, and these two sets of factors are identical.*

The scope of application of the fundamental structure theorem 8.1 will be broadened by the comprehensive classes of primal clusters whose existence we shall establish.

We further list the following consequences of the fundamental theorem:

Corollary 8.2. *If $\mathfrak{A}$ is a $\tilde{\mathfrak{P}}$-algebra and $\mathfrak{A} \not\cong \mathring{1}$, then its (unique) set $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ of (eq-minimal, or equivalently, subdirectly minimal) factors in $\tilde{\mathfrak{P}}$ satisfy*

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}| .$$

[4]) The class (v) was not explicitly mentioned in [1] to [4]. However its equivalence with each of the other classes follows from the previously established equivalence of (i) to (iv), together with the observation: in any homomorphism $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $|\mathfrak{A}| \leqq |\mathfrak{B}|$.

Corollary 8.3. *If* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *are any distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$, *if* $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{j_s}$ *are any distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$ *and if*

$$|\mathfrak{P}_{i_1}| \cap |\mathfrak{P}_{i_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{i_r}| = |\mathfrak{P}_{j_1}| \cap |\mathfrak{P}_{j_2}| \cap \cdots \cap |\mathfrak{P}_{j_s}|,$$

then: $r = s$ *and, in some order, the* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *are respectively identical with the* $\mathfrak{P}_{j_1}, \ldots$.

For algebras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ of the same species Sp, we say $\mathfrak{A}$ is "equationally maximal in $\mathfrak{B}$", in symbols

$$|\mathfrak{A}| \underset{\max}{\subset} |\mathfrak{B}|,$$

if for each identity E: $\Phi_1 = \Phi_2$ of $\mathfrak{B}$, the logical closure of $\{|\mathfrak{A}|$ augmented by $E\}$ is either $|\mathfrak{A}|$ or $|\mathfrak{B}|$. If $|\mathfrak{A}| \underset{\max}{\subset} \overline{1}$ we simply say $\mathfrak{A}$ is "equationally maximal".

Corollary 8.4. *If* $\mathfrak{P} \in \tilde{\mathfrak{P}}$, *then* $\mathfrak{P}$ *is equationally maximal. More generally, if* $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *are distinct* $\in \tilde{\mathfrak{P}}$, *and if* $\times$ *denotes direct product, then in the sequence*

$$\mathfrak{P}_{i_1} \times \mathfrak{P}_{i_2} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathfrak{P}_{i_2} \times \mathfrak{P}_{i_3} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathfrak{P}_{i_3} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_{i_r}, \quad \mathring{1},$$

each algebra is equationally maximal in its successor.

The scope of application of the fundamental structure theorem 8.1 and such corollaries as the above will be substantially broadened by the comprehensive classes of primal clusters whose existence we shall establish.

9. *A basic Lemma*

Hereafter we shall be principally concerned with the proof of the main result on primal clusters, theorem 10.6. The terminology below is that of §§ 3 to 6.

Lemma 9. *Let* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ *be two primal algebras (of the same species, Sp) and non isomorphic*

$$\mathfrak{P}_1 \ncong \mathfrak{P}_2. \tag{9.1}$$

Then corresponding to each preassigned pair of elements $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ *there exists at least one element* $\alpha_1 \in \mathfrak{P}_1$, *such that*

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2''.$$

Proof. We first observe that

$$|\mathfrak{P}_1| \neq |\mathfrak{P}_2|. \tag{9.2}$$

For from $|\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{P}_2|$ together with the last portion of theorem 7.2, follows

$$\mathfrak{P}_2 \cong \mathfrak{P}_1^{(k)} \quad (= k^{\text{th}} \text{ direct power})$$

for some positive integer k. From (9.1) $k \neq 1$. But neither is $k > 1$, for if so $\mathfrak{P}_2$ would have a proper ideal (corresponding to a homomorphism $\mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}_1$), which is impossible since a primal algebra is simple (see [3]). This contradiction proves (9.2).

So there exist expressions $\Psi_1(\xi, \eta, \ldots)$ and $\Psi_2(\xi, \eta, \ldots)$ of species Sp such that

$$\Psi_1 = \Psi_2(\mathfrak{P}_1),$$
$$\Psi_1 \neq \Psi_2(\mathfrak{P}_2).$$

For suitable $\xi_2, \eta_2, \ldots \in \mathfrak{P}_2$, then,

$$\Psi_1(\xi_2, \eta_2, \ldots) = \varkappa_2', \quad \Psi_2(\xi_2, \eta_2, \ldots) = \varkappa_2'',$$
$$\varkappa_2', \varkappa_2'' \in \mathfrak{P}_2; \quad \varkappa_2' \neq \varkappa_2''.$$

Since $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ are functionally strictly complete there exist unary expressions $\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots$ of species Sp, such that

$$\lambda(\xi) \equiv \xi_2, \quad \omega(\xi) \equiv \eta_2, \ldots \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

If we write

$$\Psi'(\xi) = \text{def} = \Psi_1(\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots),$$
$$\Psi''(\xi) = \text{def} = \Psi_2(\lambda(\xi), \omega(\xi), \ldots)$$

we have

$$\Psi'(\xi) = \Psi''(\xi) \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\Psi'(\xi) \equiv \varkappa_2', \quad \Psi''(\xi) \equiv \varkappa_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2},$$
$$\varkappa_2' \neq \varkappa_2''.$$

The strict functional completeness of $\mathfrak{P}_2$ then insures: for arbitrary preassigned $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ there exists at least one unary expression $\sigma(\xi)$ such that, in $\mathfrak{P}_2$

$$\sigma(\varkappa_2') = \beta_2', \quad \sigma(\varkappa_2'') = \beta_2''.$$

Writing

$$\mu'(\xi) = \text{def} = \sigma\big(\Psi'(\xi)\big),$$
$$\mu''(\xi) = \text{def} = \sigma\big(\Psi''(\xi)\big)$$

we have

$$\mu'(\xi) = \mu''(\xi) \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\mu'(\xi) \equiv \beta_2', \quad \mu''(\xi) \equiv \beta_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

Let now α_1 be any element in the range of $\mu'(\xi)$, mod $\mathfrak{P}_1$, — say

$$\mu'(\tau_1) = \alpha_1 \qquad (\alpha_1, \tau_1 \in \mathfrak{P}_1).$$

From the strict functional completeness of $\mathfrak{P}_1$, it follows that there exists an expression $\Pi(\xi)$ such that

$$\Pi(\xi) \equiv \tau_1 \pmod{\mathfrak{P}_1}.$$

Finally, writing

$$\Phi'(\xi) = \text{def} = \mu'\big(\Pi(\xi)\big),$$
$$\Phi''(\xi) = \text{def} = \mu''\big(\Pi(\xi)\big)$$

we have

$$\Phi'(\xi) = \Phi''(\xi) \equiv \alpha_1 \pmod{\mathfrak{P}_1},$$
$$\Phi'(\xi) \equiv \beta_2', \quad \Phi''(\xi) \equiv \beta_2'' \pmod{\mathfrak{P}_2}.$$

That is

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2''$$

and the proof of lemma 9 is complete.

10. Coframal primals; principal theorem

If in lemma 9 we further assume $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ to be coframal (§ 5), the roles of α_1, and of β_2', β_2'' may be reversed according to:

Theorem 10.1. *Let $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (of the same species, Sp) which are coframal. Then corresponding to each $\alpha \in \mathfrak{P}_1$, there exist at least two distinct $\beta', \beta'' \in \mathfrak{P}_2$ such that*

$$\alpha \sim \beta', \quad \alpha \sim \beta'' \qquad (\beta' \neq \beta'').$$

Proof. Since $\mathfrak{P}_1 = (P_1, o, \ldots)$, $\mathfrak{P}_2 = (P_2, o, \ldots)$ are coframal there exists, in particular, an expression $\cap(\xi), = \xi^{\cap}$, of species Sp such that: $\xi^{\cap}$ is a cyclic permutation of the class $P_1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$, and simultaneously $\xi^{\cap}$ is a cyclic permutation of $P_2 \pmod{\mathfrak{P}_2}$. If now α_1, α are any given elements of $\mathfrak{P}_1$, then (lemma 9) there exist distinct $\beta_2', \beta_2'' \in \mathfrak{P}_2$ such that

$$\alpha_1 \sim \beta_2', \quad \alpha_1 \sim \beta_2'' \qquad (\beta_2' \neq \beta_2'').$$

Select the integer k such that, mod $\mathfrak{P}_1$,

$$\alpha = \alpha_2^{\cap k}.$$

Theorem 10.1 then follows from lemma 6 if β', β'' are taken as

$$\beta' = \text{def} = (\beta_2')^{\cap k}, \quad \beta'' = \text{def} = (\beta_2'')^{\cap k}.$$

Definition. Let $\mathfrak{A}$, with elements $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ and $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ be finite universal algebras of orders m, n respectively. Let

$$\bar{\alpha} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n})$$

be an "n-vector" over $\mathfrak{A}$, i.e., an ordered n-tuple of elements of $\mathfrak{A}$; the components $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$ need not be distinct, and equality has its usual vector meaning,

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \bar{\alpha}^{(2)} \leftrightarrow \alpha_{i_1}^{(1)} = \alpha_{i_1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{i_n}^{(1)} = \alpha_{i_n}^{(2)}.$$

Let now

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

be an arbitrary but fixed arrangement of the elements of $\mathfrak{B}$. An n-vector $\bar{\alpha}$ over $\mathfrak{A}$ is said to "cover" $\mathfrak{B}$ if

$$\alpha_{i_1} \sim \beta_1, \ \alpha_{i_2} \sim \beta_2, \ldots, \alpha_{i_n} \sim \beta_n.$$

Lemma 10.2. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ be algebras as in theorem 10.1, and let m, n be the orders of $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ respectively. Then there exist at least n distinct (i.e. pairwise non-equal) n-vectors over $\mathfrak{P}_1$, each of which covers $\mathfrak{P}_2$.*

Proof. Let $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ be the elements of $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ respectively. By theorem 10.1 — with the (symmetric) roles of $\mathfrak{P}_1$, and $\mathfrak{P}_2$ interchanged — corresponding to each $\beta \in \mathfrak{P}_2$ there exist at least two distinct $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{P}_1$, such that

$$\alpha' \sim \beta, \qquad \alpha'' \sim \beta \qquad (\alpha' \neq \alpha'').$$

Let then

$$(10.1) \qquad \begin{cases} \alpha_{i_1} \sim \beta_1, & \alpha_{j_1} \sim \beta_1 \quad (\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}), \\ \alpha_{i_2} \sim \beta_2, & \alpha_{j_2} \sim \beta_2 \quad (\alpha_{i_2} \neq \alpha_{j_2}), \\ \quad \vdots & \\ \alpha_{i_n} \sim \beta_n, & \alpha_{j_n} \sim \beta_n \quad (\alpha_{i_n} \neq \alpha_{j_n}). \end{cases}$$

Consider now the class of n-vectors over $\mathfrak{P}_1$ in which the first component is chosen either as α_{i_1} or as α_{j_1}, in which the second component is chosen either as α_{i_2} or as α_{j_2} etc., and where these choices are made independently. By (10.1) each of these 2^n distinct vectors covers $\mathfrak{P}_2$. Since $n \geqq 2$ (part of the definition of primal algebra) we have

$$2^n > n$$

and lemma 10.2 is proved.

Theorem 10.3. *Let $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (species Sp) which are coframal. Then there exists an $\alpha^* \in \mathfrak{P}_1$ which is co-constant with all elements of $\mathfrak{P}_2$,*

$$\alpha^* \sim \beta \quad \text{for all} \quad \beta \in \mathfrak{P}_2.$$

Proof. As before let $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ denote the elements of $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ respectively. Let

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_{r_1}'\}, \\ B_2 &= \{\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_{r_2}''\}, \\ &\vdots \\ B_m &= \{\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \ldots, \beta_{r_m}^{(m)}\} \end{aligned}$$

denote the "co-constant classes" of $\mathfrak{P}_2$ relative to $\mathfrak{P}_1$, i.e.,

(10.2) $B_i =$ class of all elements of $\mathfrak{P}_2$ which are co-constant with α_i $(1 \leqq i \leqq m)$.

The m classes B_i will of course not be disjoint, because of theorem 10.1. From theorem 10.1 the integers r_i satisfy

$$2 \leqq r_i \leqq n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Theorem 10.3 is now equivalent to the assertion:

(10.3) $\qquad r_i = n$ for at least one i $(1 \leqq i \leqq m)$.

We shall prove theorem 10.3 indirectly. Assume the theorem to be false, i.e., assume

(10.4) $\qquad 2 \leqq r_i < n \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$

The assumed falsity of the theorem further implies: (A) For each $\beta \in \mathfrak{P}_2$ there exists at least one co-constant class B_i [(10.2) above] which does not

contain β. This is seen since if (A) were false there would exist a $\beta^* \in \mathfrak{P}_2$ co-constant with each $\alpha \in \mathfrak{P}_1$, which in turn says that theorem 10.3 is true — with $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ interchanged. Since the hypotheses on $\mathfrak{P}_1$ and $\mathfrak{P}_2$ in theorem 10.3 are symmetrical, the assertion (A) follows.

Let

$$h = \min(m, n). \tag{10.5}$$

Further let

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^{(h)} = (\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \ldots, \alpha_n^{(h)}) \end{cases} \tag{10.6}$$

be h n-vectors over $\mathfrak{P}_1$ which are pairwise non-equal and each of which covers $\mathfrak{P}_2$. The existence of such n-vectors follows from (10.5) and lemma 10.2. We now select a class

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_h} \tag{10.7}$$

of h (not necessarily distinct — see case 2 below) elements of $\mathfrak{P}_1$ as follows:

Case 1, $m \leq n$. Here $h = m$, and we select (10.7) as:

$$\alpha_{i_1} = \alpha_1, \ \alpha_{i_2} = \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_{i_h} = \alpha_h = \alpha_m. \tag{10.8}$$

Case 2, $n < m$. Here $h = n$, and we select the elements of (10.7) subject to the condition (10.9), but otherwise arbitrarily in $\mathfrak{P}_1$:

$$\beta_1 \notin B_{i_1}, \ \beta_2 \notin B_{i_2}, \ \ldots, \ \beta_h (= \beta_n) \notin B_{i_n}. \tag{10.9}$$

Here [see (10.2)] B_{i_μ} is the class of all elements of $\mathfrak{P}_2$ which are co-constant with α_{i_μ} $(\mu = 1, 2, \ldots, h(=n))$. The possibility of satisfying (10.9), and hence the existence of the corresponding elements $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h}$ follows from (A) following (10.4).

In case 1, above, the h elements (10.6) are of course all distinct elements of $\mathfrak{P}_1$; in case 2 this is generally not so. In either case, however, it follows from lemma 9, (A) — following (10.4) — and (10.9) that: the classes $B_{i_1}, \ldots, B_{i_h}$ have an empty intersection,

$$B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_h} = 0. \tag{10.10}$$

Now from the (strict) functional completeness of the algebra $\mathfrak{P}_1$, from the fact that the h n-vectors $\bar{\alpha}^{(1)}, \ldots, \bar{\alpha}^{(h)}$ over $\mathfrak{P}_1$ specified by (10.6) are pairwise non-equal, and from the fact that $h = \min(m, n) \leq n$, it follows that: there exists an expression $\sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ of species Sp such that, mod $\mathfrak{P}_1$, σ satisfies

$$\begin{cases} \sigma(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) = \alpha_{i_1}, \\ \sigma(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}) = \alpha_{i_2} \pmod{\mathfrak{P}_1}, \\ \vdots \\ \sigma(\alpha_1^{(h)}, \alpha_2^{(h)}, \ldots, \alpha_n^{(h)}) = \alpha_{i_h}, \end{cases} \tag{10.11}$$

where $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h}$ are elements (10.7) of $\mathfrak{P}_1$, determined by case 1 or by case 2 according as $h = m$ or $h = n$.

We recall that

$$(10.12) \qquad \begin{cases} \alpha_1^{(1)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(1)} \sim \beta_2 \ \ldots \ \alpha_n^{(1)} \sim \beta_n \\ \alpha_1^{(2)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(2)} \sim \beta_2 \qquad \alpha_n^{(2)} \sim \beta_n \\ \vdots & \\ \alpha_1^{(h)} \sim \beta_1 & \alpha_2^{(h)} \sim \beta_2 \qquad \alpha_n^{(h)} \sim \beta_n. \end{cases}$$

From (10.11), (10.12) and lemma 6 it follows that, mod $\mathfrak{P}_2$, the element $\sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ satisfies:

$$(10.13) \qquad \begin{cases} \sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \sim \alpha_{i_1}, \\ \sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \sim \alpha_{i_2}, \\ \vdots \\ \sigma(\beta_1, \ldots \qquad \beta_n) \sim \alpha_{i_h}. \end{cases}$$

Thus $\sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ is an element of $\mathfrak{P}_2$ which is co-constant with each of the elements $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_h} \in \mathfrak{P}_1$. But this is impossible by (10.10), which expressly asserts that no element of $\mathfrak{P}_2$ is co-constant with each of the elements $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_h}$. This contradiction, resulting from the assumption (10.4), then completes the proof of theorem 10.3.

Theorem 10.4. *Let $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ be non-isomorphic primal algebras (species Sp) which are coframal. Then each element of $\mathfrak{P}_1$ is co-constant with all elements of $\mathfrak{P}_2$.*

Proof. Let $\alpha \in \mathfrak{P}_1$. We must show that

$$\alpha \sim \beta \quad \text{for all} \quad \beta \in \mathfrak{P}_2.$$

If α is the α^* of theorem 10.3 we are through. If not let ξ° be a unary expression which is simultaneously a cyclic permutation of P_1 mod $\mathfrak{P}_1$, and a cyclic permutation of P_2, mod $\mathfrak{P}_2$; such ξ° exists because of our assumption of coframality. Then of course for each t, $\xi^{\circ t}$ is again such a simultaneous cyclic permutation. Choose t so that

$$(\alpha^*)^{\circ t} = \alpha.$$

Then from

$$\alpha^* \sim \beta_1, \ \alpha^* \sim \beta_2, \ \ldots, \ \alpha^* \sim \beta_n$$

together with lemma 6, we have

$$\alpha \sim \beta_1^{\circ t}, \alpha \sim \beta_2^{\circ t}, \ \ldots, \ \alpha \sim \beta_n^{\circ t}.$$

Since $\beta_1^{\circ t}, \ldots, \beta_n^{\circ t}$ is now merely some arrangement of the elements $\beta_1, \ldots, \beta_n$ of $\mathfrak{P}_2$, the theorem follows.

Theorem 10.5. *Let $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ be a finite class of primal algebras, all of the same species Sp,*

$$\mathfrak{P}_i = (P_i, \mathfrak{o}, \ldots),$$

where the class is coframal, and the $\mathfrak{P}_i$ are pairwise non-isomorphic. Then $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ are independent.

Proof. Let

$$(P_i, \times, ^{\frown}; 0_i, 1_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

be a class of coframes. Applying theorem 10.4 we have

$$1_i \sim 0_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Theorem 10.5 then follows at once from theorem 5.3.

From the definition of primal cluster theorem 10.5 at once yields

Theorem 10.6, Principal theorem. *Let* $\mathfrak{P} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ *be a class of primal algebras* $\mathfrak{P}_i$, *all of the same species* Sp, *in which each finite subset of the* $\mathfrak{P}_i$ *are coframal, and the* $\mathfrak{P}_i$ *are pairwise non-isomorphic. Then* $\mathfrak{P}$ *is a primal cluster*:

A *primal frame* is now defined as a frame $\mathfrak{B} = (B, \times, ^{\frown})$ — see § 5 — which is a primal algebra, i.e., which is functionally strictly complete. The examples (i) to (vi) of § 7 are of this category, and these examples are further subsumed in the profusion of primal frames whose existence is asserted by theorem 7.1. Since all frames are (naturally) coframal algebras, theorem 10.6 has the corollary:

Theorem 10.7. $\mathfrak{B} = \{\ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots\}$, *the class of all non-isomorphic primal frames* $\mathfrak{B}_i = (B_i, \times, ^{\frown})$, *form a primal cluster.*

The fundamental structure theorem, theorem 8, then applies to each $\mathfrak{P}$, and in particular to $\mathfrak{B}$, of theorems 10.6, 10.7.

11. Projected further extension

The concept of coframality has served as a useful tool for determining independence among universal algebras, and it is basically this circumstance which underlies the appearance of this concept in the primal clusters established by theorem 10.6. If coframality is thus conceived as a tool, and not as an intrinsic property of independence, it is plausible to suppose that the cluster property of a class $\{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$ of primal algebras, $\mathfrak{P}_i$, may well follow from a weaker restriction than coframality. Indeed incomplete work currently in progress makes even the extreme situation highly probable, that no restriction at all (other than non-isomorphism) is necessary, that is, that: for a class of primal algebras, coframality — and with it independence — already follows from their mere non-isomorphism. This extreme projected result we state as the following

Conjecture C 11. $\tilde{\mathfrak{P}}(Sp) = \tilde{\mathfrak{P}} = \{\ldots, \mathfrak{P}_i, \ldots\}$, *the class of all (pairwise non-isomorphic) primal algebras of preassigned species* Sp, *form a primal cluster.*

The truth of C 11 would of course imply

$$\mathfrak{P} \subseteq \tilde{\mathfrak{P}}$$

for all primal clusters $\mathfrak{P}$ (of species Sp) and this in turn carries with it an *absolute* extension of theorem 8.1 — where the (relative) $\mathfrak{P}$ is replaced by $\tilde{\mathfrak{P}}$.

Such absolute results would be particularly significant for the unicity of (equational — as well as subdirect —) factorization. For instance, from § 8 we should have

C 11.1. *If* $\mathfrak{A}$ *is a* $\tilde{\mathfrak{P}}$*-algebra and if* $\mathfrak{A} \not\cong \mathring{1}$, *then there exists one and only one set of primal algebras* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$ *(of species Sp) such that*

(1°) *the* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *are all distinct (i.e., pairwise non-isomorphic).*

(2°) $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{P}_{i_1}| \frown |\mathfrak{P}_{i_2}| \frown \cdots \frown |\mathfrak{P}_{i_r}|$.

For these $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots$ *it then further follows that*

(3°) $\mathfrak{A}$ *is isomorphic with the direct product of suitable subdirect powers of* $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_r}$.

In a similar way the whole theory may immediately be cast in absolute form.

References

[1] Foster, A. L.: Generalized „Boolean" theory of universal algebras, Part I: Subdirect sums and normal representation theorem. Math. Z. **58**, 306—336 (1953). — [2] Foster, A. L.: Generalized „Boolean" theory of universal algebras, Part II: Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. Math. Z. **59**, 191—199 (1953). — [3] Foster, A. L.: The identities of—and unique subdirect factorization within—classes of universal algebras. Math. Z. **62**, 171—188 (1955). — [4] Foster, A. L.: Ideals and their structure in classes of operational algebras. Math. Z. **65**, 70—75 (1956). — Additional references may be found in the bibliographies of the above papers.

University of California, Berkeley

(Eingegangen am 5. Mai 1956)

Krickeberg, K.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 470—486 (1957)

Stochastische Konvergenz von Semimartingalen

Von
Klaus Krickeberg

Die Doobschen Sätze über die Konvergenz fast überall von Martingalen beschränkter Variation[1]), deren Index-(Parameter-)bereich eine Menge reeller Zahlen und daher eine linear geordnete Menge darstellt, wurden in [8] auf den Fall von Martingalen mit filtrierenden (gerichteten) Indexbereichen übertragen, und zwar unter einer „Vitalischen" Hypothese $\boldsymbol{V}_0$, die sich nur auf die Martingalbasis[1]) bezieht. Es erscheint jedoch in vielen Fällen wünschenswert, auch dann noch über eine geeignete Grenzfunktion zu verfügen, wenn $\boldsymbol{V}_0$ nicht erfüllt ist. Da man Konvergenz im Sinne eines Raumes L^p nur bei gleichmäßig integrierbaren Martingalen erwarten kann (cf. [6]), so liegt es nahe, nach stochastischer Konvergenz zu fragen. Das Hauptergebnis dieser Arbeit bildet denn auch der Satz 6.5, daß jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder unten stochastisch gegen eine integrierbare Funktion konvergiert, und dasselbe gilt für jedes Semimartingal beschränkter Variation.

Da der Begriff der stochastischen Konvergenz ohnehin invariant ist gegenüber Änderungen der beteiligten Funktionen in einer Nullmenge, so betrachten wir von vornherein die modulo der Nullmengen reduzierte Maßalgebra. Es spielt sich also alles in einer abstrakten Booleschen sigma-Algebra $\mathfrak{B}$ mit einer Einheit E und einem strikt positiven sigma-endlichen Maß μ ab, wodurch sich unsere Überlegungen sehr vereinfachen. Eine $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion (zufällige Variable) ist etwa im Sinne Carathéodorys als „Ortsfunktion" aufzufassen, wobei unendliche Werte stets zugelassen werden. Neben der stochastischen Konvergenz von Moore-Smithschen Folgen $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen haben wir die übliche Ordnungskonvergenz (wesentliche Konvergenz), die die stochastische Konvergenz impliziert und im Fall abzählbarer Folgen mit der Konvergenz „fast überall" identisch ist.

Das siebente, letzte Kapitel enthält, als eine Art Ergänzung zu [8], den Beweis der Ordnungskonvergenz von Semimartingalen beschränkter Variation unter einer Vitalischen Bedingung $\boldsymbol{V}''$, die $\boldsymbol{V}_0$ nach sich zieht und im Fall eines linear geordneten Indexbereichs immer erfüllt ist. Hieraus folgt zwar die stochastische Konvergenz von Semimartingalen beschränkter Variation, wenn jede konfinale Menge von Indizes eine linear geordnete konfinale Teilmenge enthält, doch gibt es wichtige Indexbereiche, die diese Eigenschaft nicht haben, so daß der direkte Beweis der stochastischen Konvergenz nicht überflüssig ist. Als Beispiel sei das System aller Zerlegungen des Einheitsintervalls $\langle 0, 1 \rangle$ in endlich viele Teilintervalle, mit der „Verfeinerung" als Ordnungsrelation, erwähnt.

[1]) Zur Definition vgl. § 6.

Anwendungen auf additive und semiadditive Zellenfunktionen (verallgemeinerte Intervallfunktionen) ergeben sich ganz analog den Betrachtungen in [8], § 10, und sind daher hier nicht besonders behandelt worden. Es besitzt also z.B. jede semiadditive Funktion beschränkter Variation eine „stochastische" Ableitung, die als Ersatz der üblichen Ableitung dienen mag, wenn kein Vitalisches Axiom vorliegt.

Der Beweis des Hauptsatzes 6.5 stützt sich auf stochastische obere und untere Limites beliebiger Moore-Smithscher Folgen $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen f_σ, die in den Kapiteln 2—5 definiert und untersucht werden. § 2 enthält die grundlegenden Eigenschaften, z.B. $s \lim\inf_\sigma f_\sigma \leqq s \lim\sup_\sigma f_\sigma$, und das Gleichheitszeichen ist für die stochastische Konvergenz charakteristisch. In § 3 findet sich die Invarianz der stochastischen Limites gegenüber Einschränkungen des Definitionsbereichs E oder des Systems $\mathfrak{B}$ der meßbaren Elemente. § 4 bringt einen Vergleich der stochastischen mit den üblichen Ordnungslimites. In § 5 wird das Analogon des FATOUschen Lemmas mit den stochastischen Limites, nämlich (5.2) und (5.3), unter einer geeigneten Bedingung $\boldsymbol{S}$ sehr einfach bewiesen. Zum Vergleich wird das FATOUsche Lemma mit den Ordnungslimites auf demselben Wege unter einer Annahme $\boldsymbol{T}$ abgeleitet, die aus $\boldsymbol{S}$ folgt und ebenso wie $\boldsymbol{S}$ strikt schwächer als die bisher benutzte Voraussetzung der gleichmäßigen oder terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit der unbestimmten Integrale der Folge ist. Zugleich zeigt sich, daß man für das FATOUsche Lemma mit stochastischen Limites eine Bedingung, nämlich eben $\boldsymbol{S}$, benötigt, die eine Art partielle gleichmäßige *Totalstetigkeit* der unbestimmten Integrale ausdrückt, während für das FATOUsche Lemma mit Ordnungslimites eine Bedingung, etwa $\boldsymbol{T}$, ausreicht, die eine Art partielle gleichmäßige *Additivität* darstellt. Im Fall der gewöhnlichen abzählbaren Folgen summierbarer Funktionen trat dieser Unterschied nie zutage, weil dort beide Bedingungen äquivalent sind.

Angesichts der Tatsache, daß sich die stochastische Konvergenz ebenso wie die Ordnungskonvergenz durch das Zusammenfallen geeigneter oberer und unterer Limites definieren läßt, erhebt sich die Frage, welche der bekannten Konvergenzbegriffe für gewöhnliche oder Moore-Smithsche Folgen im Raum $\mathfrak{F}$ aller $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen außerdem noch diese Eigenschaft haben. Stellt man an die fraglichen Limites die natürliche Forderung, daß ihre Bildung mit der Einschränkung auf ein festes Element aus $\mathfrak{B}$ vertauschbar sei, so zeigt sich leicht, daß die Konvergenz im Sinne der Räume L^p und die gleichmäßige Konvergenz im allgemeinen sofort ausscheiden. Ohne Beweis sei hier jedoch bemerkt, daß sich in jedem vollständigen Verband obere und untere Limites Moore-Smithscher Folgen sinnvoll definieren lassen, die die Konvergenz im Sinne der sog. „Intervalltopologie" erzeugen. Diese Limites liegen im Fall des vollständigen Verbandes $\mathfrak{F}$ zwischen den stochastischen, so daß die stochastische Konvergenz die Intervallkonvergenz impliziert. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht, denn bekanntlich ist $\mathfrak{F}$ hinsichtlich der Intervalltopologie, aber nicht hinsichtlich der stochastischen Topologie kompakt.

§ 1. Grundlagen

$\mathfrak{B}$ sei eine *Boolesche sigma-Algebra* mit dem Einselement E und dem Nullelement O, auf der sich ein strikt positives sigma-endliches Maß und daher auch ein *strikt positives endliches Maß* erklären läßt[2]). $\mathfrak{F}$ bedeute den Raum aller $\mathfrak{B}$-meßbaren *reellen*[3]) *Funktionen* über E, definiert als CARATHÉODORYsche Ortsfunktionen (cf. [2]) oder als Zerlegungen der Einheit (Spektralscharen, vgl. [11], S. 382). In $\mathfrak{B}$, in $\mathfrak{F}$ und in der Menge aller reellen Zahlen werde die *Ordnung*[4]) durch $\leqq$, die Bildung des *Infimums* durch $\wedge$ und die Bildung des *Supremums* durch $\vee$ bezeichnet. Hingegen mögen $\subseteq$, $\cap$ und $\cup$ die mengentheoretischen Relationen und Operationen darstellen. Statt $A \wedge B$, wobei $A, B \in \mathfrak{B}$, schreiben wir auch AB und ebenso $\mathfrak{LM}$ statt $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$. Die *Differenz* $A - B$ in $\mathfrak{B}$ werde nur im Fall $B \leqq A$ betrachtet; sie fällt dann mit der uneingeschränkt ausführbaren *symmetrischen Differenz* $A \dotplus B = (A \vee B) - AB$ zusammen.

Symbole wie $\{f < g\}$ oder $\{f = g\}$ oder $\{f \leqq \lambda\}$, in denen f und g Funktionen aus $\mathfrak{F}$ und λ eine reelle Zahl bezeichnen, mögen die übliche Bedeutung haben (vgl. z.B. [7], S. 223). Man könnte etwa $\{f < g\}$ lesen als „das Element aus $\mathfrak{B}$, in dem $f < g$". Gleichungen oder Ungleichungen der Gestalt „$f = g\,[A]$" oder „$f < g\,[A]$" mit $f, g \in \mathfrak{F}$ und $A \in \mathfrak{B}$ sollen ausdrücken, daß die Einschränkungen von f und g auf A die fragliche Relation erfüllen. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir die konstante Funktion aus $\mathfrak{F}$, die überall den Wert λ hat, ebenfalls durch λ bezeichnen.

Bekanntlich bildet $\mathfrak{F}$ einen vollständigen Verband, und $\mathfrak{B}$ ist im verbandstheoretischen Sinne isomorph einem vollständigen Unterverband von $\mathfrak{F}$, nämlich dem der charakteristischen Funktionen. Jede Teilmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ enthält eine abzählbare[5]) Menge $\mathfrak{D}$ mit $\wedge\mathfrak{G} = \wedge\mathfrak{D}$ und $\vee\mathfrak{G} = \vee\mathfrak{D}$. Wir sagen, $\mathfrak{G}$ *filtriere nach rechts*, wenn es zu je zwei Funktionen f und g aus $\mathfrak{G}$ eine Funktion h aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $f, g \leqq h$.

Wir wollen von einer hinsichtlich eines Maßes μ auf $\mathfrak{B}$ integrierbaren Funktion f aus $\mathfrak{F}$ nicht verlangen, daß $\int\limits_E f\,d\mu$ endlich sei, nennen also f schon dann *integrierbar*, wenn das über E erstreckte Integral von $f^+ = f \vee 0$ oder $f^- = (-f) \vee 0$ endlich ist. Sind beide endlich, d.h. ist $\int\limits_E f\,d\mu$ endlich, so heiße f *summierbar*. Der folgende Satz ist wohlbekannt (cf. z.B. [7], S. 223).

Satz 1.1. *Es sei μ ein strikt positives sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ eine nach rechts filtrierende Menge hinsichtlich μ integrierbarer Funktionen. Ist nun $-\infty < \int\limits_E f_0\,d\mu$ für wenigstens ein f_0 aus $\mathfrak{G}$, so wird auch $\vee\mathfrak{G}$ integrierbar und*

$$\int\limits_E (\vee\mathfrak{G})\,d\mu = \bigvee_{f \in \mathfrak{G}} \int\limits_E f\,d\mu.$$

[2]) Vgl. [11], S. 379; weitere Hinweise und ausführlichere Diskussion der Bezeichnungen in [7], S. 222—223.

[3]) Wir betrachten auch $-\infty$ und $+\infty$ als reelle Zahlen.

[4]) In anderer Terminologie: teilweise Ordnung.

[5]) „Abzählbar" soll stets „endlich oder abzählbar" bedeuten.

§ 2. Stochastischer limes inferior und superior

Es sei Θ eine nicht leere und hinsichtlich einer transitiven Relation $\lessdot$ *nach rechts filtrierende* Menge, d.h. zu je zwei Elementen ϱ und τ von Θ gebe es ein Element σ von Θ mit $\varrho, \tau \lessdot \sigma$. Eine Teilmenge Γ von Θ heißt *terminal*, wenn ein Element τ von Θ existiert, so daß jedes σ mit $\tau \lessdot \sigma$ zu Γ gehört. Das Komplement in Θ einer nicht terminalen Menge wird *konfinal* genannt. Wir betrachten im folgenden Moore-Smithsche Folgen $(a_\sigma; \sigma \in \Theta)$ von reellen Zahlen, Funktionen aus $\mathfrak{F}$ oder anderen Objekten. Da der *Indexbereich* Θ und die Relation $\lessdot$ fast immer festgehalten werden, schreiben wir statt dessen meistens nur (a_σ) und sprechen kurz von einer *Folge*. Unter einer *Teilfolge* von $(a_\sigma; \sigma \in \Theta)$ verstehen wir eine Folge $(a_\sigma; \sigma \in \Gamma)$, wobei Γ konfinal in Θ und mit der auf Γ eingeschränkten Relation $\lessdot$ versehen ist. Eine Fréchetsche Folge ist eine Folge mit der Menge der natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung als Indexbereich.

Der Vorbereitung der Definition eines stochastischen limes inferior und superior einer Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$ dienen die folgenden Überlegungen. μ sei ein strikt positives endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Eine Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ heißt bekanntlich stochastisch konvergent gegen O oder konvergent dem Maße nach gegen O, wenn $\lim_\sigma \mu(A_\sigma) = 0$, d.h. wenn (A_σ) hinsichtlich der Nikodýmschen Metrik $\mu(X+Y)$ gegen O strebt. Da jedes strikt positive endliche Maß auf $\mathfrak{B}$ totalstetig in bezug auf jedes andere ist, so hängt dieser Konvergenzbegriff nicht von μ ab. Im Fall eines sigma-endlichen Maßes haben wir die folgende Charakterisierung.

Satz 2.1. *Es sei ν ein strikt positives sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Dann und nur dann konvergiert die Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O, wenn für jedes H aus $\mathfrak{B}$ mit $\nu(H) < +\infty$ gilt*

$$\lim_\sigma \nu(HA_\sigma) = 0. \tag{2.1}$$

Beweis. Aus $\lim_\sigma \mu(A_\sigma) = 0$ folgt $\lim_\sigma \mu(HA_\sigma) = 0$ und damit (2.1), weil ν im Bereich der Teile von H endlich bleibt. Es sei andererseits (2.1) erfüllt und $\varepsilon > 0$. Infolge der sigma-Endlichkeit von ν gibt es ein H mit $\nu(H) < +\infty$ und $\mu(E-H) < \varepsilon$. Aus (2.1) folgt dann $\lim_\sigma \mu(HA_\sigma) = 0$, d.h. $\mu(HA_\sigma) < \varepsilon$ und daher $\mu(A_\sigma) < 2\varepsilon$ für terminal viele σ.

Eine Funktion h' aus $\mathfrak{F}$ heiße eine *Majorante* einer Funktion h aus $\mathfrak{F}$, wenn $h \leqq h'$ und $\{h = h'\} = \{h = +\infty\}$. Analog werde g' als eine *Minorante* von g bezeichnet, wenn $g' \leqq g$ und $\{g' = g\} = \{g = -\infty\}$. Der Einfachheit halber formulieren wir die folgenden Feststellungen nur für Majoranten.

2.2. *Ist $h_1 \leqq h_2$, so bildet jede Majorante von h_2 auch eine Majorante von h_1.*

2.3. *Ist h' eine Majorante von $h_1 \wedge h_2$, so existieren Majoranten h_1' und h_2' von h_1 bzw. h_2 mit $h' = h_2' \wedge h_1'$.*

Beweis. Definieren wir $h_1 - h_2$ und $h_2 - h_1$ überall dort als Null, wo diese Differenzen ursprünglich keinen Sinn haben, und beachten wir, daß h' den Wert $-\infty$ nicht annimmt, so lassen sich die Funktionen $h_1' = h' + (h_1 - h_2)^+$ und $h_2' = h' + (h_2 - h_1)^+$ bilden, die die verlangten Eigenschaften haben.

Es sei nun (f_σ) eine Folge in $\mathfrak{F}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}$ die Menge aller Funktionen h aus $\mathfrak{F}$ derart, daß für jede Majorante h' von h die Folge $(\{h'<f_\sigma\})$ in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O konvergiert, und entsprechend mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller Funktionen g derart, daß für jede Minorante g' von g die Folge $(\{f_\sigma<g'\})$ stochastisch gegen O strebt. Offenbar gilt $+\infty\in\mathfrak{H}$ und $-\infty\in\mathfrak{G}$. Aus der Definition der stochastischen Konvergenz in $\mathfrak{B}$ und aus dem Satz 2.1 ergeben sich unmittelbar Beschreibungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ mit Hilfe eines strikt positiven, endlichen oder sigma-endlichen Maßes auf $\mathfrak{B}$.

Aus 2.2 folgt

2.4. *Ist* $h_1\leqq h_2$ *und* $h_1\in\mathfrak{H}$, *so auch* $h_2\in\mathfrak{H}$.

Aus 2.3 und $\{h_1'\wedge h_2'<f_\sigma\}=\{h_1'<f_\sigma\}\vee\{h_2'<f_\sigma\}$ resultiert

2.5. *Ist* $h_1\in\mathfrak{H}$ *und* $h_2\in\mathfrak{H}$, *so auch* $h_1\wedge h_2\in\mathfrak{H}$.

Entsprechende Feststellungen treffen natürlich auf $\mathfrak{G}$ zu.

2.6. *Ist* $g\in\mathfrak{G}$ *und* $h\in\mathfrak{H}$, *so* $g\leqq h$.

Beweis. g' sei eine Minorante von g und h' eine Majorante von h. Aus $\{h'<g'\}\leqq\{f_\sigma<g'\}\vee\{h'<f_\sigma\}$ folgt, da die rechte Seite stochastisch gegen O strebt, daß $\{h'<g'\}=O$, also $g'\leqq h'$. Dies trifft auf jede Minorante g' von g und jede Majorante h' von h zu, und somit gilt in der Tat $g\leqq h$.

Wir definieren nun den *stochastischen limes inferior* und *superior* von (f_σ) durch

$$s\liminf_\sigma f_\sigma=\vee\mathfrak{G},\qquad s\limsup_\sigma f_\sigma=\wedge\mathfrak{H}. \tag{2.2}$$

Aus 2.6 folgt unmittelbar der

Satz 2.7. *Es gilt* $s\liminf_\sigma f_\sigma\leqq s\limsup_\sigma f_\sigma$.

Ferner haben wir die folgende Verallgemeinerung von 2.5:

Satz 2.8. *Es ist* $s\liminf_\sigma f_\sigma\in\mathfrak{G}$ *und* $s\limsup_\sigma f_\sigma\in\mathfrak{H}$.

Beweis. h' sei eine Majorante von $h^*=s\limsup_\sigma f_\sigma$. Wir wählen ein strikt positives endliches Maß μ auf $\mathfrak{B}$ und haben dann zu zeigen, daß

$$\lim_\sigma\mu(\{h'<f_\sigma\})=0. \tag{2.3}$$

Hierzu betrachten wir die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{B}$ der Form $\{h\geqq h'\}$ mit $h\in\mathfrak{H}$. Diese Menge ist nicht leer, da $\mathfrak{H}$ nicht leer ist, sie filtriert wegen 2.5 und $\{h_1\wedge h_2\geqq h'\}=\{h_1\geqq h'\}\wedge\{h_2\geqq h'\}$ nach links, und es gilt

$$\bigwedge_{h\in\mathfrak{H}}\{h\geqq h'\}=\{h^*=+\infty\}.$$

Nach Satz 1.1, auf charakteristische Funktionen angewandt, und wegen der Endlichkeit von μ existiert also zu gegebenem positivem ε ein Element h_0 aus $\mathfrak{H}$ mit

$$\mu(\{h_0\geqq h'\}-\{h^*=+\infty\})<\varepsilon. \tag{2.4}$$

Die folgende Funktion h'' ist eine Majorante von h_0:

$$h''=+\infty\quad[\{h_0\geqq h'\}],\qquad h''=h'\quad[\{h_0<h'\}].$$

Daher gibt es einen Index τ, so daß $\tau \ll \sigma$ impliziert

$$\mu(\{h'' < f_\sigma\}) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Nun ist

$$\{h' < f_\sigma\} \leqq \{h'' < f_\sigma\} \vee (\{h_0 \geqq h'\} - \{h^* = +\infty\}),$$

d.h. wegen (2.4) und (2.5) gilt $\mu(\{h' < f_\sigma\}) < 2\varepsilon$ für alle σ mit $\tau \ll \sigma$, womit (2.3) bewiesen ist.

Wir bezeichnen die Folge (f_σ) als *stochastisch konvergent* gegen die Funktion $f = s\lim_\sigma f_\sigma$, wenn $s\liminf_\sigma f_\sigma = s\limsup_\sigma f_\sigma = f$ ist. Dies ist auf Grund von (2.2) und der Sätze 2.7 und 2.8 gleichwertig damit, daß für jede Minorante g' und jede Majorante h' von f die Folge $(\{f_\sigma < g'\} \vee \{h' < f_\sigma\})$ in $\mathfrak{B}$ stochastisch gegen O strebt. Dann und nur dann konvergiert (f_σ) stochastisch, wenn $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$ nicht leer ist, und in diesem Fall gilt $\mathfrak{G}\mathfrak{H} = \{s\lim_\sigma f_\sigma\}$. Die stochastische Konvergenz gegen O in $\mathfrak{B}$, von der wir ausgingen, reduziert sich auf die eben definierte stochastische Konvergenz, wenn wir charakteristische Funktionen betrachten.

Üblicherweise definiert man den Begriff der stochastischen Konvergenz nur für endlichwertige Funktionen. Daß dieser Begriff dann mit dem hier erklärten zusammenfällt, zeigt der folgende

Satz 2.9. *Dann und nur dann konvergiert eine Folge (f_σ) endlicher Funktionen gegen eine endliche Funktion f, wenn für jede positive Zahl η die Folge $(\{|f_\sigma - f| > \eta\})$ stochastisch gegen O strebt.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig, weil $f - \eta$ eine Minorante und $f + \eta$ eine Majorante von f darstellt. Wir nehmen andererseits an, die Bedingung sei erfüllt, und betrachten irgendeine Majorante h' von f, ein strikt positives endliches Maß μ auf $\mathfrak{B}$ und eine positive Zahl ε. Aus $\bigwedge_{i=1}^{\infty} \left\{h' < f + \frac{1}{i}\right\} = O$ folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n mit $\mu\left(\left\{h' < f + \frac{1}{n}\right\}\right) < \varepsilon$. Voraussetzungsgemäß gilt dann $\mu\left(\left\{f + \frac{1}{n} < f_\sigma\right\}\right) < \varepsilon$ für terminal viele σ, d.h. wegen $\{h' < f_\sigma\} \leqq \left\{h' < f + \frac{1}{n}\right\} \vee \left\{f + \frac{1}{n} < f_\sigma\right\}$ auch $\mu(\{h' < f_\sigma\}) < 2\varepsilon$, also $f \in \mathfrak{H}$ und ebenso $f \in \mathfrak{G}$.

Der stochastische limes inferior und superior und damit der Begriff der stochastischen Konvergenz beliebiger Folgen in $\mathfrak{F}$ lassen sich übrigens mittels einer der üblichen eineindeutigen ordnungstreuen Abbildungen der durch $-\infty$ und $+\infty$ abgeschlossenen Zahlengeraden auf das Intervall $\langle -1, 1\rangle$ auf die entsprechenden Begriffe im Fall endlicher Funktionen zurückführen. Es sei z.B. $\boldsymbol{A}f = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} f$, wobei arc tg den Hauptwert bedeutet, mit den Werten $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ an der Stelle $-\infty$ bzw. $+\infty$. Wir bezeichnen die bisher betrachteten Mengen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ jetzt durch $\mathfrak{G}(f_\sigma)$ und $\mathfrak{H}(f_\sigma)$, um die Abhängigkeit von der Folge (f_σ) zum Ausdruck zu bringen. Aus der Eineindeutigkeit und

Ordnungstreue von $\boldsymbol{A}$ erhalten wir die folgende Erzeugung von $\mathfrak{H}(\boldsymbol{A}f_\sigma)$ mit Hilfe von $\boldsymbol{A}\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und umgekehrt.

2.10. *$\mathfrak{H}(\boldsymbol{A}f_\sigma)$ besteht aus allen Funktionen h, zu denen es eine Funktion $\tilde{h}$ aus $\boldsymbol{A}\mathfrak{H}(f_\sigma)$ mit $\tilde{h} \leq h$ gibt. $\boldsymbol{A}\mathfrak{H}(f_\sigma)$ besteht aus allen Funktionen der Form $1 \wedge h$ mit $h \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{A}f_\sigma)$.*

Ein entsprechender Satz bezieht sich auf $\mathfrak{G}(\boldsymbol{A}f_\sigma)$ und $\boldsymbol{A}\mathfrak{G}(f_\sigma)$. Hieraus folgt, da die Operationen $\wedge$ und $\vee$ mit $\boldsymbol{A}$ vertauschbar sind:

Satz 2.11. *Es ist* $s\lim\inf_\sigma \boldsymbol{A}f_\sigma = \boldsymbol{A}(s\lim\inf_\sigma f_\sigma)$ *und* $s\lim\sup_\sigma \boldsymbol{A}f_\sigma = \boldsymbol{A}(s\lim\sup_\sigma f_\sigma)$.

Bekanntlich läßt sich die stochastische Konvergenz im Raum $\mathfrak{E}$ aller endlichen Funktionen aus $\mathfrak{F}$ mit Hilfe einer Metrik beschreiben (cf. z.B. [5], S. 82). Setzen wir nämlich $\boldsymbol{M}(f) = \bigwedge_{\eta>0}\big(\mu(\{|f| \geq \eta\}) + \eta\big)$, wobei μ ein strikt positives endliches Maß auf $\mathfrak{B}$ bedeutet, so bildet $\mathfrak{E}$ mit der Metrik $\boldsymbol{M}(f-g)$ einen vollständigen metrischen Raum, und $s\lim_\sigma f_\sigma = f$ ist gleichbedeutend mit $\lim_\sigma \boldsymbol{M}(f_\sigma - f) = 0$. Nach Satz 2.11 stellt daher auch $\mathfrak{F}$ mit der Metrik $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}f - \boldsymbol{A}g)$ einen vollständigen metrischen Raum dar, und $s\lim_\sigma f_\sigma = f$ ist äquivalent mit $\lim_\sigma \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}f_\sigma - \boldsymbol{A}f) = 0$. Insbesondere bekommen wir den

Satz 2.12. *Gibt es eine Funktion f in $\mathfrak{F}$, so daß jede Teilfolge von (f_σ) eine stochastisch gegen f konvergente Teilfolge enthält, so konvergiert (f_σ) selbst stochastisch gegen f.*

§ 3. Invarianz der stochastischen Limites

$\mathfrak{A}$ sei eine Boolesche *sigma-Unteralgebra* von $\mathfrak{B}$ mit demselben Einselement E und demselben Nullelement O. Wir wollen zeigen, daß die in bezug auf $\mathfrak{A}$ gebildeten stochastischen Limites einer Folge (f_σ) mit denen in bezug auf $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, wenn jedes f_σ sogar $\mathfrak{A}$-meßbar ist. Zuvor die folgenden Bemerkungen.

Da das Infimum und das Supremum in $\mathfrak{B}$ jeder Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ gleich dem Infimum und Supremum einer abzählbaren Teilmenge von $\mathfrak{C}$ ist, so bildet $\mathfrak{A}$ nicht nur hinsichtlich der abzählbaren, sondern hinsichtlich aller verbandstheoretischen Operationen einen Unterverband von $\mathfrak{B}$, und zu jedem Element M von $\mathfrak{B}$ gibt es ein größtes in M enthaltenes und ein kleinstes M enthaltendes Element von $\mathfrak{A}$, den $\mathfrak{A}$-*Kern* $\boldsymbol{K}M$ und die $\mathfrak{A}$-*Hülle* $\boldsymbol{H}M$. Ebenso stellt das System $\mathfrak{F}_\mathfrak{A}$ aller $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktionen über E einen vollständigen Unterverband von $\mathfrak{F}$ dar, und zu jeder Funktion f aus $\mathfrak{F}$ existiert eine größte $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion $\boldsymbol{K}f$ unterhalb von f und eine kleinste $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion $\boldsymbol{H}f$ oberhalb von f.

μ bedeute in diesem Kapitel ein festes strikt positives und endliches Maß.

Lemma 3.1. *Es sei $M \in \mathfrak{B}$ und $\boldsymbol{K}M = O$. Dann gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, so daß aus $A \in \mathfrak{B}$ und $\mu(A) < \delta$ folgt $\mu\big(\boldsymbol{K}(A \vee M)\big) < \varepsilon$.*

Beweis. Wäre das Lemma falsch, so existierte eine positive Zahl ε und eine Fréchetsche Folge (A_n) in $\mathfrak{B}$ mit $\lim_n \mu(A_n) = 0$ und

$$\mu\big(\boldsymbol{K}(A_n \vee M)\big) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

Die Folge (A_n) enthielte (vgl. [5], S. 83) eine Teilfolge (A_{n_k}) mit $\lim_k A_{n_k} = O$. Daher hätte $B_l = \bigvee_{l \leq k} A_{n_k}$ die folgenden Eigenschaften:

$$A_{n_l} \leq B_l, \quad B_{l+1} \leq B_l, \quad \lim_l B_l = O. \tag{3.2}$$

Hieraus folgte

$$\boldsymbol{K}(A_{n_l} \vee M) \leq \boldsymbol{K}(B_l \vee M) \tag{3.3}$$

und $\boldsymbol{K}(B_{l-1} \vee M) \leq \boldsymbol{K}(B_l \vee M)$. Infolgedessen existierte der Grenzwert $C = \lim_l \boldsymbol{K}(B_l \vee M)$ und es wäre $C \leq B_l \vee M$ für jedes l, also auf Grund der letzten Ungleichung (3.2) sogar $C \leq M$ und daher $C = O$, weil $C \in \mathfrak{A}$ und $\boldsymbol{K}M = O$. Aus (3.3) ergäbe sich $\lim_l \boldsymbol{K}(A_{n_l} \vee M) = O$ im Widerspruch zu (3.1).

Es sei nun (f_σ) eine Folge $\mathfrak{A}$-meßbarer Funktionen. Wir bezeichnen die analog zu $\mathfrak{H}$ aber in bezug auf $\mathfrak{A}$ gebildete Menge durch $\mathfrak{H}_\mathfrak{A}$. Es gilt also $h \in \mathfrak{H}_\mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn $h \in \mathfrak{F}_\mathfrak{A}$ und wenn $\{h' < f_\sigma\}$ für jede $\mathfrak{A}$-meßbare Majorante h' von h stochastisch gegen O konvergiert. Entsprechend werde $\mathfrak{G}_\mathfrak{A}$ definiert.

3.2. *Es ist* $\mathfrak{H}_\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}_\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$.

Beweis. Es sei $h \in \mathfrak{H}_\mathfrak{A}$, h' eine Majorante von h und $\varepsilon > 0$. Zu jeder natürlichen Zahl i definieren wir eine $\mathfrak{A}$-meßbare Majorante h_i' von h in der folgenden Weise: $h_i' = +\infty\ [\{h = +\infty\}]$, $h_i' = h + \frac{1}{i}\ [\{-\infty < h < +\infty\}]$, $h_i' = -i\ [\{-\infty = h\}]$. Die Folge $(\{h' < h_i'\})$ konvergiert monoton fallend gegen O, und daher existiert ein Index n mit $\mu(\{h' < h_n'\}) < \varepsilon$. Wegen $h \in \mathfrak{H}_\mathfrak{A}$ gilt $\mu(\{h_n' < f_\sigma\}) < \varepsilon$ für terminal viele σ. Aus $\{h' < f_\sigma\} \leq \{h' < h_n'\} \vee \{h_n' < f_\sigma\}$ folgt daher $\mu(\{h' < f_\sigma\}) < 2\varepsilon$ für terminal viele σ, d.h. $h \in \mathfrak{H}$.

3.3. *Ist* $h \in \mathfrak{H}$, *so* $\boldsymbol{K}h \in \mathfrak{H}_\mathfrak{A}$; *ist* $g \in \mathfrak{G}$, *so* $\boldsymbol{H}g \in \mathfrak{G}_\mathfrak{A}$.

Beweis. Da die Transformation $\boldsymbol{A}f = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} f$ und ihre Inverse jede $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion auf eine $\mathfrak{A}$-meßbare abbilden und mit den Operationen $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{K}$ vertauschbar sind, so können wir auf Grund von 2.10 annehmen, daß alle Werte der Funktionen f_σ und h im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$ liegen. Ferner genügt es, endliche Majoranten zu betrachten. Es sei also h' eine $\mathfrak{A}$-meßbare endliche Majorante von $\boldsymbol{K}h$. Zu zeigen ist

$$\lim_\sigma \mu(\{h' < f_\sigma\}) = 0. \tag{3.4}$$

Wir bestimmen zunächst eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion h^* mit

$$\boldsymbol{K}h < h^* < h'. \tag{3.5}$$

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{K}\{h^* < h\} = O, \tag{3.6}$$

denn in $\boldsymbol{K}\{h^* < h\}$ müßte gelten $h^* < h$, also $h^* \leq \boldsymbol{K}h$. Sodann setzen wir $h'' = h + h' - h^*$. Wegen (3.5) ist h'' eine Majorante von h. Ferner gilt $\{h' < h''\} = \{h^* < h\}$, also nach (3.6):

$$\boldsymbol{K}\{h' < h''\} = O. \tag{3.7}$$

Aus $h \in \mathfrak{H}$ erhalten wir $\lim_\sigma \mu(\{h'' < f_\sigma\}) = 0$ und somit wegen (3.7) und Lemma 3.1:

$$\lim_\sigma \mu\big(\boldsymbol{K}(\{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\})\big) = 0. \tag{3.8}$$

Nun ist aber $\{h' < f_\sigma\} \leqq \{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\}$ und infolgedessen, da h' und f_σ beide $\mathfrak{A}$-meßbar sind, sogar $\{h' < f_\sigma\} \leqq \boldsymbol{K}(\{h'' < f_\sigma\} \vee \{h' < h''\})$. Dies zusammen mit (3.8) zieht die Behauptung (3.4) nach sich.

Aus 3.2 folgt $\wedge \mathfrak{H} \leqq \wedge \mathfrak{H}_\mathfrak{A}$ und aus 3.3 die entgegengesetzte Ungleichung. Ebenso bekommen wir $\vee \mathfrak{G} = \vee \mathfrak{G}_\mathfrak{A}$ und damit den

Satz 3.4. *Ist jedes f_σ eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion, so stimmen die in bezug auf $\mathfrak{B}$ gebildeten stochastischen Limites von (f_σ) mit denen in bezug auf $\mathfrak{A}$ überein. Insbesondere sind diese Limites ebenfalls $\mathfrak{A}$-meßbar.*

Ein ähnlicher Satz trifft auf die Einschränkungen auf ein Element C aus $\mathfrak{B}$ zu. Wir bezeichnen das System aller B aus $\mathfrak{B}$ mit $B \leqq C$ durch $C\mathfrak{B}$ und die Einschränkung einer Funktion f aus $\mathfrak{F}$ auf C durch $\boldsymbol{C}f$.

3.5. *Es ist $\mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma) = \boldsymbol{C}\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und $\mathfrak{G}(\boldsymbol{C}f_\sigma) = \boldsymbol{C}\mathfrak{G}(f_\sigma)$.*

Beweis. Ist $h^* \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma)$, so gehört die folgende Funktion h zu $\mathfrak{H}(f_\sigma)$ und es wird $h^* = \boldsymbol{C}h$: $h = h^*[C]$ und $h = +\infty\,[E - C]$. Ist andererseits $h \in \mathfrak{H}(f_\sigma)$, so gilt $\boldsymbol{C}h \in \mathfrak{H}(\boldsymbol{C}f_\sigma)$, wie eine analoge Erweiterung auf E der Majoranten von $\boldsymbol{C}h$ zeigt.

Da die Operationen $\wedge$ und $\vee$ mit $\boldsymbol{C}$ vertauschbar sind, so erhalten wir aus 3.5 den

Satz 3.6. *Die stochastischen Limites der Folge der Einschränkungen der f_σ auf C, gebildet im Raum der $C\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen über C, sind gleich den Einschränkungen auf C der stochastischen Limites von (f_σ).*

§ 4. Stochastische und Ordnungslimites

Zur Unterscheidung von den stochastischen Limites wollen wir, wie üblich, den limes inferior und superior einer Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$, definiert durch

$$\liminf_\sigma f_\sigma = \bigvee_{\tau \in \Theta} \bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma, \qquad \limsup_\sigma f_\sigma = \bigwedge_{\tau \in \Theta} \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma,$$

als *Ordnungslimites* bezeichnen. Analog, oder charakteristische Funktionen betrachtend, erhalten wir Ordnungslimites in $\mathfrak{B}$. Es ist leicht, direkt zu zeigen, daß

$$\liminf_\sigma f_\sigma \leqq s\liminf_\sigma f_\sigma \leqq s\limsup_\sigma f_\sigma \leqq \limsup_\sigma f_\sigma, \tag{4.1}$$

doch wollen wir dies aus einer Charakterisierung der Ordnungslimites ableiten, die der der stochastischen Limites analog ist und daher beide leicht zu vergleichen erlaubt.

Es sei $\hat{\mathfrak{H}}$ die Menge aller Funktionen h aus $\mathfrak{F}$ derart, daß für jede Majorante h' von h gilt $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, und entsprechend sei $\hat{\mathfrak{G}}$ definiert.

Satz 4.1. *Es ist $\liminf_\sigma f_\sigma = \vee \hat{\mathfrak{G}}$ und $\limsup_\sigma f_\sigma = \wedge \hat{\mathfrak{H}}$.*

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $\hat{h} = \wedge \hat{\mathfrak{H}}$, $h^* = \limsup_\sigma f_\sigma$ und

$$g_\tau = \bigvee_{\tau \leqslant \sigma} f_\sigma .$$

Ist h' eine Majorante von h^*, so haben wir $\lim_\tau \{h' < g_\tau\} = O$, also $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, d.h. $h^* \in \hat{\mathfrak{H}}$ und daher

$$\hat{h} \leqq h^* . \tag{4.2}$$

Sodann sei $h \in \hat{\mathfrak{H}}$. Bildet h' eine Majorante von h, so wird $\lim_\sigma \{h' < f_\sigma\} = O$, d.h. $\lim_\tau \{h' < g_\tau\} = O$ und somit $h^* \leqq h'$. Da dies für jede Majorante h' von h gilt, so muß sogar $h^* \leqq h$ sein. Dies trifft auf jedes h aus $\hat{\mathfrak{H}}$ zu, und daher $h^* \leqq \hat{h}$. Hieraus und aus (4.2) folgt die zweite der Behauptungen, und ebenso ergibt sich die erste.

Die Mengen $\hat{\mathfrak{G}}$ und $\hat{\mathfrak{H}}$ haben ebenso wie $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die durch 2.4 und 2.5 ausgedrückten Eigenschaften, und der gerade geführte Beweis zeigt, daß auch 2.6 und die Sätze 2.7 und 2.8 gelten, wenn $\mathfrak{G}$ durch $\hat{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{H}$ durch $\hat{\mathfrak{H}}$ und die stochastischen Limites durch die Ordnungslimites ersetzt werden. Nach Satz 1.1 und wegen $\{h' < g_\tau\} = \bigvee_{\tau \leqslant \sigma} \{h' < f_\sigma\}$ konvergiert die Folge $(\{h' < f_\sigma\})$ dann und nur dann gegen O, wenn die Folge $(\{h' < g_\tau\})$ stochastisch gegen O strebt. Wir erhalten so eine der Definition der stochastischen Limites gleichlautende Erklärung der Ordnungslimites, indem wir f_σ durch g_σ ersetzen. Zugleich ergibt sich $\hat{\mathfrak{H}} \subseteqq \mathfrak{H}$ und $\hat{\mathfrak{G}} \subseteqq \mathfrak{G}$, was (4.1) nach sich zieht. Insbesondere ist jede ordnungskonvergente Folge auch stochastisch konvergent. Hieraus und aus Satz 2.12 folgt der

Satz 4.2. *Gibt es eine Funktion f in $\mathfrak{F}$, so daß jede Teilfolge von (f_σ) eine gegen f ordnungskonvergente Teilfolge enthält, so konvergiert (f_σ) stochastisch gegen f.*

§ 5. Vertauschung von Integration und stochastischem Grenzübergang

In diesem Kapitel bedeute μ ein festes strikt positives und sigma-endliches Maß. Wir betrachten die folgende Bedingung über eine Folge (f_σ) hinsichtlich μ integrierbarer Funktionen.

S. *Für jede stochastisch gegen O konvergierende Folge (A_σ) in $\mathfrak{B}$ gilt*

$$\lim_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu = 0 . \tag{5.1}$$

Ersetzen wir (5.1) durch $\limsup_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \leqq 0$ oder $\liminf_\sigma \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \geqq 0$, so erhalten wir zwei Bedingungen, die wir durch $\boldsymbol{S}^+$ und $\boldsymbol{S}^-$ bezeichnen wollen. $\boldsymbol{S}$ ist die Konjunktion von $\boldsymbol{S}^+$ und $\boldsymbol{S}^-$. Aus $f_\sigma \leqq f_\sigma^+$ und $\int_{A_\sigma} f_\sigma^+ d\mu = \int_{B_\sigma} f_\sigma \, d\mu$ mit $B_\sigma = A_\sigma \{0 \leqq f_\sigma\}$ folgt, daß (f_σ) dann und nur dann $\boldsymbol{S}^+$ erfüllt, wenn (f_σ^+) die Bedingung $\boldsymbol{S}$ befriedigt, und entsprechend ist die Bedingung $\boldsymbol{S}^-$ über (f_σ) gleichwertig mit der Bedingung $\boldsymbol{S}$ über (f_σ). Dann und nur dann trifft die Bedingung $\boldsymbol{S}$ auf (f_σ) zu, wenn sie auf $(|f_\sigma|)$ zutrifft.

Satz 5.1. *Es sei (f_σ) eine Folge integrierbarer Funktionen, die die Bedingung* $\mathbf{S}^+$ *erfüllt, und es sei auch* $s\limsup_\sigma f_\sigma$ *integrierbar. Dann gilt für jedes Element* A *aus* $\mathfrak{B}$

$$\limsup_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu \leq \int_A (s\limsup_\sigma f_\sigma)\, d\mu. \tag{5.2}$$

Analog gilt unter der Voraussetzung $\mathbf{S}^-$, *wenn* $s\liminf_\sigma f_\sigma$ *integrierbar ist,*

$$\int_A (s\liminf_\sigma f_\sigma)\, d\mu \leq \liminf_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu. \tag{5.3}$$

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $A = E$ zu betrachten. Zur Abkürzung setzen wir $h = s\limsup_\sigma f_\sigma$ und nehmen zunächst an, daß

$$-\infty < \int_E h \, d\mu. \tag{5.4}$$

Dann ist insbesondere $-\infty < h$, und daher existiert zu gegebenem positivem ε eine integrierbare Majorante h' von h derart, daß

$$\int_B h' \, d\mu \leq \int_B h \, d\mu + \varepsilon \tag{5.5}$$

für jedes B aus $\mathfrak{B}$ gilt. Definieren wir $A_\sigma = \{h' < f_\sigma\}$ und $B_\sigma = E - A_\sigma = \{f_\sigma \leq h'\}$, so konvergiert (A_σ) nach Satz 2.8 stochastisch gegen O. Es gibt also gemäß $\mathbf{S}^+$ einen Index τ_1, so daß $\int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu < \varepsilon$ für jedes σ mit $\tau_1 \ll \sigma$. Wegen (5.4) existiert ein Index τ_2, so daß aus $\tau_2 \ll \sigma$ folgt $-\varepsilon < \int_{A_\sigma} h \, d\mu$. Im Fall $\tau_1, \tau_2 \ll \sigma$ gilt dann wegen (5.5):

$$\int_E f_\sigma \, d\mu = \int_{B_\sigma} f_\sigma \, d\mu + \int_{A_\sigma} f_\sigma \, d\mu \leq \int_{B_\sigma} h' \, d\mu + \varepsilon \leq \int_{B_\sigma} h \, d\mu + 2\varepsilon \leq \int_E h \, d\mu + 3\varepsilon,$$

womit (5.2) bewiesen ist.

Wir können nun die Voraussetzung (5.4) wie im Fall der Ordnungslimites durch das geläufige Verfahren beseitigen, das darin besteht, die Funktionen $f_\sigma \vee g_n$ zu betrachten, wobei (g_n) eine monoton fallend gegen $-\infty$ konvergierende Fréchetsche Folge summierbarer negativer Funktionen darstellt (vgl. z.B. [7], S. 230).

Ein Beispiel von AMERIO ([4], S. 14) zeigt, daß im Satz 5.1 die Voraussetzung, $s\limsup_\sigma f_\sigma$ sei integrierbar, sogar im Fall einer Fréchetschen Folge selbst dann nicht aus $\mathbf{S}$ abgeleitet werden kann, wenn die f_σ gleichmäßig beschränkte unbestimmte Integrale haben, d.h. wenn die Menge aller $\int_A f_\sigma \, d\mu$ mit $A \in \mathfrak{B}$ und $\sigma \in \Theta$ beschränkt ist. In diesem Beispiel ist $s\limsup_\sigma f_\sigma = \limsup_\sigma f_\sigma$. Ganz entsprechend dem Fall des Ordnungslimes und auf gleichem Wege mit Hilfe des Satzes 5.1 beweisbar (cf. [10], S. 445—446) gilt jedoch der

Satz 5.2. *Ist (f_σ) eine stochastisch konvergente Folge integrierbarer Funktionen und sind die unbestimmten Integrale der f_σ nach oben oder unten beschränkt, so wird $f = s\lim_\sigma f_\sigma$ gleichfalls integrierbar und $\int_E f \, d\mu < +\infty$ bzw. $-\infty < \int_E f \, d\mu$.*

Zum Vergleich wollen wir auch dem Satz 5.1 den entsprechenden Satz über Ordnungslimites gegenüberstellen. Wir sagen, die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen erfülle die Bedingung $\boldsymbol{T}$, wenn folgendes eintritt:

$\boldsymbol{T}$. *Für jede gegen O konvergierende Folge* (A_σ) *in* $\mathfrak{B}$ *gilt* (5.1).

Analog sind $\boldsymbol{T}^+$ und $\boldsymbol{T}^-$ definiert.

Mit Hilfe des Satzes 4.1 läßt sich nun der folgende Satz ebenso wie der Satz 5.1 beweisen.

Satz 5.3. *Es sei* (f_σ) *eine Folge integrierbarer Funktionen, die die Bedingung* $\boldsymbol{T}^+$ *erfüllt, und es sei auch* $\limsup_\sigma f_\sigma$ *integrierbar. Dann gilt für jedes Element* A *aus* $\mathfrak{B}$

$$\limsup_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu \leqq \int_A (\limsup_\sigma f_\sigma) \, d\mu . \tag{5.6}$$

Analog gilt unter der Voraussetzung $\boldsymbol{T}^-$, *wenn* $\liminf_\sigma f_\sigma$ *integrierbar ist,*

$$\int_A (\liminf_\sigma f_\sigma) \, d\mu \leqq \liminf_\sigma \int_A f_\sigma \, d\mu . \tag{5.7}$$

Offenbar folgt $\boldsymbol{T}^+$ aus $\boldsymbol{S}^+$ und $\boldsymbol{T}^-$ aus $\boldsymbol{S}^-$, der Tatsache entsprechend, daß (5.6) wegen (4.1) schwächer als (5.2) und (5.7) schwächer als (5.3) ist. Die Ungleichungen (5.6) und (5.7), seit langem im Fall Fréchetscher Folgen mit summierbaren Limites und gleichmäßig totalstetigen unbestimmten Integralen bekannt ([9], S. 199), wurden in [7], S. 229 für Moore-Smithsche Folgen (f_σ) mit integrierbaren Limites bewiesen, deren unbestimmte Integrale terminal gleichmäßig totalstetig sind, d.h., kurz ausgedrückt, $\lim_{A,\sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu = 0$ im Sinne eines doppelten Grenzwertes, wenn A stochastisch gegen O strebt. Diese Bedingung zieht $\boldsymbol{S}$ und damit auch $\boldsymbol{T}$ nach sich, doch gilt das Umgekehrte selbst dann nicht, wenn die unbestimmten Integrale der f_σ gleichmäßig beschränkt sind. In der Tat ist $\boldsymbol{S}$ trivialerweise immer dann erfüllt, wenn in jeder gegen Null konvergenten Folge $(\alpha_\sigma ; \sigma \in \Theta)$ reeller Zahlen terminal viele α_σ verschwinden, wie z.B. im Fall einer linear geordneten Indexmenge Θ, die keine abzählbare konfinale Menge enthält. Das folgende Beispiel zeigt, daß selbst dann nicht jede Folge (f_σ) mit gleichmäßig beschränkten unbestimmten Integralen auch terminal gleichmäßig totalstetige unbestimmte Integrale zu haben braucht.

$\mathfrak{B}$ sei die Maßalgebra der im Lebesgueschen Sinne meßbaren Teilmengen des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$ modulo der Nullmengen und μ das reduzierte Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}$, doch werden wir der Bequemlichkeit halber die Reduktion modulo der Nullmengen nicht konsequent durchführen. Ψ bedeute eine linear geordnete Menge, in der es keine abzählbare konfinale Menge gibt, und für jedes ξ aus Ψ sei $\Theta_\xi = \langle 0, 1 \rangle$. Es bilde Θ die geordnete Summe der Θ_ξ, d.h. die Menge aller Paare (δ, ξ) mit $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$ und $\xi \in \Psi$, versehen mit der folgenden Ordnung: ist $\xi_1 = \xi_2$, so sei $(\delta_1, \xi_1) \ll (\delta_2, \xi_2)$ gleichbedeutend mit $\delta_1 \leqq \delta_2$; ist $\xi_1 \ll \xi_2$, so gelte $(\delta_1, \xi_1) \ll (\delta_2, \xi_2)$ für jedes δ_1 und δ_2. Zu jedem $\sigma = (\delta, \xi)$ in Θ definieren wir $f_\sigma(x) = \delta^{-1}$, wenn $0 \leqq x \leqq \delta$, und $f_\sigma(x) = 0$, wenn $\delta < x \leqq 1$. Dann ist $0 \leqq \int_A f_\sigma \, d\mu = \delta^{-1} \mu(A \langle 0, \delta \rangle) \leqq 1$, d.h. die f_σ haben

gleichmäßig beschränkte unbestimmte Integrale. Da in Θ keine abzählbare konfinale Menge existiert, ist auch $\boldsymbol{S}$ erfüllt. Hingegen gilt $\int_D f_\sigma \, d\mu = 1$ und $\mu(D) = \delta$ mit $D = \langle 0, \delta \rangle$ für jedes σ der Form (δ, ξ), und die Menge dieser Indizes ist bei festem δ konfinal in Θ, d.h. die unbestimmten Integrale der f_σ sind nicht terminal gleichmäßig totalstetig.

Übrigens sind im Fall einer Fréchetschen Folge summierbarer Funktionen f_n die Bedingungen $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ einander und der terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit, der gleichmäßigen Totalstetigkeit und der gleichmäßigen Additivität der Folge der unbestimmten Integrale der f_n äquivalent.

Wie bei den Ordnungslimites (cf. [8], 3.3 und 3.5) erhalten wir schließlich aus Satz 5.1 den

Satz 5.4. *Erfüllt die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen die Bedingung $\boldsymbol{S}^+$, ist $s \limsup_\sigma f_\sigma$ summierbar und gilt in (5.2) das Gleichheitszeichen im Fall $A = E$, so gilt es mit jedem A aus $\mathfrak{B}$. Unter entsprechenden Voraussetzungen trifft in (5.3) stets das Gleichheitszeichen zu.*

Konvergiert die Folge (f_σ) integrierbarer Funktionen stochastisch gegen eine summierbare Funkion f und ist $\int_E |f| \, d\mu = \liminf_\sigma \int_E |f_\sigma| \, d\mu$, so wird $\int_A f^+ \, d\mu = \liminf_\sigma \int_A f_\sigma^+ \, d\mu$ und $\int_A f^- \, d\mu = \liminf_\sigma \int_A f_\sigma^- \, d\mu$ für jedes A aus $\mathfrak{B}$.

§ 6. Stochastische Konvergenz von Semimartingalen

Wiederum bedeute μ ein strikt positives und sigma-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Es sei $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ eine monoton wachsende Folge von Booleschen sigma-Unteralgebren von $\mathfrak{B}$, d.h. $\tau \ll \sigma$ ziehe $\mathfrak{B}_\tau \subseteq \mathfrak{B}_\sigma$ nach sich. Eine Folge (f_σ) in $\mathfrak{F}$ heiße ein *Semimartingal* mit der *Basis* $(\mathfrak{B}_\sigma)$[6]), wenn f_σ meßbar in bezug auf $\mathfrak{B}_\sigma$ und integrierbar über E ist und wenn aus $\tau \ll \sigma$ und $A \in \mathfrak{B}_\tau$ folgt $\int_A f_\tau \, d\mu \leq \int_A f_\sigma \, d\mu$. Gilt hier stets das Gleichheitszeichen, so nennen wir (f_σ) ein *Martingal* mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$. Wir werden jedoch den Zusatz „mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$" im folgenden meist fortlassen, weil wir fast immer nur eine feste Basis betrachten wollen. Eine Ordnungsrelation $(f_\sigma) \leq (g_\sigma)$ zwischen Semimartingalen ist dann durch „$f_\sigma \leq g_\sigma$ für jedes σ in Θ" definiert, entsprechend der Begriff eines positiven oder negativen Semimartingals durch $0 \leq f_\sigma$ oder $f_\sigma \leq 0$ für jedes σ, und die Summe von (f_σ) und (g_σ) durch $(f_\sigma + g_\sigma)$, soweit sinnvoll.

Ein Semimartingal (f_σ) heiße von *beschränkter Variation*, wenn es eine terminale Menge Δ in Θ gibt, so daß die Menge aller $\int_E |f_\sigma| \, d\mu$ mit $\sigma \in \Delta$ beschränkt bleibt. Ersetzen wir $|f_\sigma|$ durch f_σ^- oder f_σ^+, so erhalten wir die Definition eines Semimartingals von beschränkter Variation „nach unten" oder „nach oben". Im letzten Fall können wir übrigens stets $\Delta = \Theta$ wählen, und dies gilt in allen drei Fällen, wenn (f_σ) ein Martingal ist.

[6]) Die Bezeichnung „Basis", einem Vorschlag von Herrn CHR. PAUC folgend, in Analogie zu einer „Ableitungsbasis" in der Theorie der Differentiation.

Die beiden folgenden Sätze wurden in [8], 4.1 und 4.4 bewiesen.

Satz 6.1. *Es sei (f_σ) ein Semimartingal, und es gebe einen Index ϱ derart, daß $-\infty < \int_E f_\varrho \, d\mu$. Für jeden Index τ bedeute $\tilde{f}_\tau$ den $\mathfrak{B}_\tau$-meßbaren* Radon-Nikodýmschen *Integranden der in $\mathfrak{B}_\tau$ durch $\lim_{\tau \ll \sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu = \bigvee_{\tau \ll \sigma} \int_A f_\sigma \, d\mu$ definierten abzählbar additiven Funktion von A. Dann bildet $(\tilde{f}_\sigma)$ das kleinste unter allen Martingalen, die größer oder gleich (f_σ) sind. Ist (f_σ) von beschränkter Variation nach oben oder unten, so auch $(\tilde{f}_\sigma)$.*

Satz 6.2. *Jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder nach unten ist die Differenz zweier positiver Martingale.*

Dem Beweis des Konvergenzsatzes dienen die folgenden Lemmata.

Lemma 6.3. *Es sei $(-f_i; i = 1, \ldots, r)$ ein negatives Semimartingal, β eine endliche reelle Zahl und $K = \{\beta < \bigvee_{i=1}^{r} f_i\}$. Dann gilt $\beta \mu(K) \leqq \int_E f_1 \, d\mu$.*

Im Fall summierbarer f_i folgt dieses Lemma aus [3], S. 314, (3.4″), und der Beweis, der sich auf [3], S. 300, Theorem 2.1 stützt, bleibt ebenso wie der Beweis dieses Theorems im Fall unendlicher Integrale der f_i unverändert.

Lemma 6.4. *Es sei $A \in \mathfrak{B}$, $\mu(A) < +\infty$, $\zeta \in \Theta$ und (K_σ) eine Folge in $\mathfrak{B}$ derart, daß für jedes B mit $0 < B \leqq A$ gilt*

$$\limsup_\sigma \mu(BK_\sigma) > 0. \tag{6.1}$$

Dann gibt es eine Fréchetsche Folge (ξ_i) in Θ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \xi_3 \ll \cdots$ und $A \leqq \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}$.

Beweis (vgl. ähnliche Überlegungen in [5], S. 207). Für jedes B mit $B \leqq A$ definieren wir $v(B) = \limsup_\sigma \mu(BK_\sigma)$. Aus $B \leqq C \leqq A$ folgt $v(B) \leqq v(C)$, und voraussetzungsgemäß ist $v(B) = 0$ gleichwertig mit $B = O$. Sodann sei $B_1 = A$. Ist $B_1 = O$, so bleibt nichts zu beweisen. Andernfalls bestimmen wir einen Index ξ_1 mit $\zeta \ll \xi_1$ und $v(B_1) < 2\mu(B_1 K_{\xi_1})$. Die Folge (ξ_i) induktiv konstruierend nehmen wir nun an, Indizes $\xi_1, \ldots, \xi_r$ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \cdots \ll \xi_r$ seien gefunden derart, daß

$$v(B_i) < 2\mu(B_i K_{\xi_i}), \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{6.2}$$

wobei $B_i = A - A(K_{\xi_1} \vee \cdots \vee K_{\xi_{i-1}})$. Es sei $B_{r+1} = A - A(K_{\xi_1} \vee \cdots \vee K_{\xi_r})$. Ist $B_{r+1} = O$, so sind wir bereits fertig; andernfalls gibt es einen Index ξ_{r+1} mit $\xi_r \ll \xi_{r+1}$ und $v(B_{r+1}) < 2\mu(B_{r+1} K_{\xi_{r+1}})$. Es bleibt der Fall zu betrachten, daß dieses Verfahren nicht abbricht. Da die Elemente $B_i K_{\xi_i}$ paarweise fremd und Teile von A sind, so folgt aus $\mu(A) < +\infty$, daß $\lim_i \mu(B_i K_{\xi_i}) = 0$, d. h. wegen (6.2) auch $\lim_i v(B_i) = 0$ und somit $v(\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$, also $\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i = O$ ist. Nun gilt aber $\bigwedge_{i=1}^{\infty} B_i = A - A \bigvee_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}$, und damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 6.5. *Jedes Semimartingal von beschränkter Variation konvergiert stochastisch. Im Fall eines Martingals genügt bereits die Annahme beschränkter Variation nach oben oder unten.*

Beweis. Auf Grund des Satzes 6.1 läßt sich jedes Semimartingal (f_σ) von beschränkter Variation für terminal viele σ in der Gestalt $f_\sigma = \tilde{f}_\sigma + (f_\sigma - \tilde{f}_\sigma)$ schreiben, wobei $\tilde{f}_\sigma$ ein Martingal von beschränkter Variation und $f_\sigma - \tilde{f}_\sigma$ ein negatives Semimartingal darstellt. Nach Satz 6.2 ist jedes Martingal von beschränkter Variation nach oben oder nach unten die Differenz zweier positiver, also auch zweier negativer Martingale. Es genügt daher, die stochastische Konvergenz einer Folge (f_σ) mit $0 \leqq f_\sigma$ zu beweisen, wobei $(-f_\sigma)$ ein Semimartingal darstellt.

Wir nehmen an, (f_σ) konvergiere nicht stochastisch. Es sei $\mathfrak{B}_\infty$ die kleinste Boolesche sigma-Unteralgebra von $\mathfrak{B}$, die jedes $\mathfrak{B}_\sigma$ enthält. Nach Satz 3.4 gibt es ein von O verschiedenes Element A aus $\mathfrak{B}_\infty$ mit $\mu(A) < +\infty$ und zwei positive endliche Zahlen α und β derart, daß $s\lim\inf_\sigma f_\sigma < \alpha < \beta < s\lim\sup_\sigma f_\sigma\,[A]$. Für jedes Element B mit $O < B \leqq A$ ist dann nach 3.5:

$$\lim\sup_\sigma \mu(B\{f_\sigma < \alpha\}) > 0, \quad \lim\sup_\sigma \mu(B\{\beta < f_\sigma\}) > 0. \tag{6.3}$$

Insbesondere gilt

$$\eta = 2^{-1}\lim\sup_\sigma \mu(A\{f_\sigma < \alpha\}) > 0. \tag{6.4}$$

Es sei nun $0 < \varepsilon < 1$. Wegen $A \in \mathfrak{B}_\infty$ existieren ein Index ϱ und ein Element C aus $\mathfrak{B}_\varrho$ mit

$$\mu(A + C) < \varepsilon\eta, \tag{6.5}$$

wobei $+$ die symmetrische Differenz bedeutet. Sodann gibt es wegen (6.4) einen Index ζ mit $\varrho \ll \zeta$ und

$$\mu(A\{f_\zeta < \alpha\}) > \eta. \tag{6.6}$$

Definieren wir $L = C\{f_\zeta < \alpha\}$, so ist

$$L \in \mathfrak{B}_\zeta, \quad f_\zeta < \alpha\,[L]. \tag{6.7}$$

Ferner gilt

$$\mu(LA) > (1 - \varepsilon)\,\mu(L). \tag{6.8}$$

In der Tat: setzen wir $\delta = \mu(A\{f_\zeta < \alpha\})$, $\delta_1 = \mu\big((A - AC)\{f_\zeta < \alpha\}\big)$ und $\delta_2 = \mu\big((C - CA)\{f_\zeta < \alpha\}\big)$, so wird $\mu(L) = \delta - \delta_1 + \delta_2$ und $\mu(LA) = \delta - \delta_1$. Nach (6.5) und (6.6) ist $\delta_1 < \varepsilon\delta$ und $\delta_2 < \varepsilon\delta$, also

$$\frac{\delta - \delta_1 + \delta_2}{\delta - \delta_1} = 1 + \frac{\delta_2}{\delta - \delta_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

d.h. (6.8).

Aus der zweiten Ungleichung (6.3) und dem Lemma 6.4 ergibt sich nun die Existenz einer Fréchetschen Folge (ξ_i) in Θ mit $\zeta \ll \xi_1 \ll \xi_2 \ll \xi_3 \ll \cdots$ und

$A \leqq \bigvee_{i=1}^{\infty} \{\beta < f_{\xi_i}\}$. Daher gibt es eine natürliche Zahl r derart, daß das Element

$$K = L \bigvee_{i=1}^{r} \{\beta < f_{\xi_i}\} = L \{\beta < \bigvee_{i=1}^{r} f_{\xi_i}\} \tag{6.9}$$

die Ungleichung $\mu(AL - AK) < \varepsilon\, \mu(AL)$ erfüllt. Zusammen mit (6.8) und $\mu(K) \geqq \mu(AK)$ bedeutet dies

$$\mu(K) > (1 - \varepsilon)^2 \mu(L). \tag{6.10}$$

Wegen (6.7) und $\zeta \ll \xi_1 \ll \cdots \ll \xi_r$ bilden die auf L eingeschränkten Funktionen $-f_{\xi_1}, \ldots, -f_{\xi_r}$ ein negatives Semimartingal. Aus dem Lemma 6.3 und aus (6.9) folgt daher $\beta\mu(K) \leqq \int_L f_{\xi_1}\, d\mu$. Aus der Definition eines Semimartingals und aus $\zeta \ll \xi_1$ und (6.7) erhalten wir weiter

$$\int_L f_{\xi_1}\, d\mu \leqq \int_L f_{\zeta}\, d\mu \leqq \alpha\, \mu(L),$$

d.h. $\beta\mu(K) \leqq \alpha\, \mu(L)$, also nach (6.10): $\beta(1-\varepsilon)^2 < \alpha$. Dies widerspricht $\alpha < \beta$, wenn ε hinreichend klein ist, und damit ist der Konvergenzsatz bewiesen.

Ein System gleichwertiger Bedingungen dafür, daß neben der stochastischen Konvergenz auch Konvergenz der unbestimmten Integrale vorliegt, läßt sich nun mit Hilfe der Sätze 5.1, 5.2 und 5.4 ganz ähnlich wie in [8], 8.2 und 8.3 aufstellen und beweisen, nach dem Muster des Falls der Fréchetschen Folgen in [3], S. 319 und 325. Die hiermit zusammenhängende Frage der Fortsetzbarkeit eines Martingals $(f_\sigma; \sigma \in \Theta)$ mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ zu einem Martingal $(f_\sigma; \sigma \in \Theta \cup \{\infty\})$ mit der Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta \cup \{\infty\})$, wobei ∞ ein auf alle Elemente von Θ folgendes von ihnen verschiedenes Element und $\mathfrak{B}_\infty$ die kleinste alle $\mathfrak{B}_\sigma$ enthaltende Boolesche sigma-Algebra bedeute, wurde schon von Bochner ([1], S. 164) berührt. Das ebenfalls hierbei auftretende Problem der Konvergenz im Sinne des Raums L^p wurde von Helms in [6] behandelt.

§ 7. Ordnungskonvergenz von Semimartingalen

In [8] wurde gezeigt, daß ein Martingal von beschränkter Variation nach oben oder unten nicht nur stochastisch, sondern sogar ordnungskonvergent ist, wenn die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma; \sigma \in \Theta)$ ein „Vitalisches" Axiom $\boldsymbol{V}_0$ erfüllt. Im Fall der Semimartingale ließ sich nur eine schwächere Behauptung beweisen ([8], 9.1). Es führt jedoch eine geeignete Verschärfung von $\boldsymbol{V}_0$ auch zur Ordnungskonvergenz von Semimartingalen.

Eine Folge $(K_\sigma; \sigma \in \Theta)$ in $\mathfrak{B}$ heiße wie in [8] eine *feine Überdeckung* eines Elementes A von $\mathfrak{B}$, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

Für jedes σ gilt $K_\sigma \in \mathfrak{B}_\sigma$, und für jede terminale Menge Δ in Θ ist

$$A \leqq \bigvee \{K_\sigma; \sigma \in \Delta\}.$$

Wir sagen, die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$ habe die Vitalische Eigenschaft $\boldsymbol{V}'$, wenn folgendes zutrifft:

$\boldsymbol{V}'$. *Bildet (K_σ) eine feine Überdeckung eines Elementes A endlichen Maßes und ε eine positive Zahl, so gibt es eine endliche Indexmenge $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ in Θ mit $\mathfrak{B}_{\xi_1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{B}_{\xi_r}$ und $\mu(A - A \bigvee_{i=1}^{r} K_{\xi_r}) < \varepsilon$.*

Wie im Fall von $\boldsymbol{V}_0$ läßt sich beweisen, daß sich an der Gültigkeit von $\boldsymbol{V}'$ beim Übergang von einem zu einem anderen strikt positiven sigma-endlichen Maß μ nichts ändert. Der Beweis des Satzes 6.2 in [8] zeigt unmittelbar, daß $\boldsymbol{V}_0$ aus $\boldsymbol{V}'$ folgt und daß $\boldsymbol{V}'$ sicher dann eintritt, wenn die Menge aller $\mathfrak{B}_\sigma$ durch $\subseteq$ linear geordnet ist, wie z.B. in dem Fall, daß Θ durch $\ll$ linear geordnet ist. $\boldsymbol{V}'$ gilt ferner auch immer dann, wenn $\mathfrak{B}$ rein atomistisch ist[7]), und dies zeigt, daß die Bedingung, es gebe eine terminale Menge Δ in Θ, so daß die Menge aller $\mathfrak{B}_\sigma$ mit $\sigma \in \Delta$ durch $\subseteq$ linear geordnet sei, keineswegs notwendig für $\boldsymbol{V}'$ ist.

Satz 7.1. *Erfüllt die Basis $(\mathfrak{B}_\sigma)$ das Vitalische Axiom $\boldsymbol{V}'$, so ist jedes Semimartingal von beschränkter Variation ordnungskonvergent.*

Der Beweis besteht in einer direkten Kombination des Beweises des Satzes 8.1 in [8] mit dem des Satzes 6.5 der vorliegenden Arbeit: Man beginne wie in [8], wende statt $\boldsymbol{V}_0$ das Axiom $\boldsymbol{V}'$ an und benutze schließlich wie im gegenwärtigen Satz 6.5 das DOOBsche Lemma 6.3.

Literatur

[1] BOCHNER, S.: Partial ordering in the theory of martingales. Ann. of Math., Ser. II **62**, 162—169 (1955). — [2] CARATHÉODORY, C.: Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs. Sitzgsber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1938**, 27—69. — [3] DOOB, J. L.: Stochastic processes. New York 1953. — [4] FICHERA, G.: Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale. Portugaliae Math. **4**, 1—20 (1943). — [5] HAUPT-AUMANN-PAUC: Differential- und Integralrechnung, III. 2. Aufl. Berlin 1955. — [6] HELMS, L. L.: Thesis. Purdue University, Lafayette, Ind., 1956. — [7] KRICKEBERG, K.: Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration. Sitzgsber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1955**, 217—279. — [8] KRICKEBERG, K.: Convergence of martingales with a directed index set. Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 313—337 (1956). — [9] PICONE-VIOLA: Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione. Manuali Einaudi. 1952. — [10] DE LA VALLÉE POUSSIN, C.: Sur l'intégrale de Lebesgue. Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 435—501 (1915). — [11] WECKEN, F.: Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen. Math. Z. **45**, 377—404 (1939).

[7]) In diesem Fall folgt übrigens die Ordnungskonvergenz direkt aus der stochastischen.

Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, Wis. (USA)

(Eingegangen am 24. Juli 1956)

Bose, S. K.
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 487—489 (1957)

A note concerning some properties of the Maximum Function of a Meromorphic Function

By
S. K. Bose

In a paper [1], I have stated the following theorems:

Theorem I. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, then*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_1(r)}{r^{\varrho}},$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ;

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_2(r)}{r^{\varrho}},$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ.

Theorem II. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(1<\varrho_1<\varrho<\infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{r^{\varrho}}=0,$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1.

Theorem III. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(1<\varrho<\infty)$, and $f_1(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,\overline{0})}<\infty;$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ and $P(z)$ is also of order ϱ, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Shah and Singh [2] have constructed counter-examples for each of the above theorems. The reason is that the conditions imposed on these theorems are not sufficient. In the proof of these theorems, I have assumed, under the conditions imposed on theorems I and III,

(α) $$\frac{\log m_2(r)}{\log M_1(r)}\to 0 \quad \text{as } r\to\infty,$$

where $m_2(r)$ is the minimum modulus of $P(z)$ for $|z|=r$ and $M_1(r)=\max\limits_{|z|=r}|f_1(z)|$.

In theorem II, I have assumed

(β) $$\frac{\log m_2(r)}{r^{\varrho}}\to 0 \quad \text{as } r\to\infty.$$

These steps are faulty, as can easily be seen from the results of Hayman [3], in the case of meromorphic functions of order ϱ, and $f_1(z)$ and $P(z)$ are also of order ϱ. But these steps do hold good, if we impose another set of conditions, and so I have re-enunciated these theorems as follows:

Theorem A. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(<\infty)$, then*

(i) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S^*(r)}{r^\varrho}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_1(r)}{r^\varrho},$$

provided $f_1(z)$ is also of order ϱ and $P(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth.

(ii) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S^*(r)}{r^\varrho}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M_2(r)}{r^\varrho},$$

provided $P(z)$ is also of order ϱ and $f_1(z)$ is of regular growth and of order less than ϱ.

Theorem B. *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ $(\varrho_1<\varrho<\infty)$, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S(r)}{r^\varrho}=0,$$

where $f_1(z)$ is of order ϱ_1, $P(z)$ is of regular growth and its genus is $\varrho-1$.

Theorem C. (i) *If $f(z)$ is a meromorphic function of non-integral order ϱ $(<\infty)$, $f_1(z)$ is also of order ϱ and $P(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,0)}<\infty.$$

(ii) *If $f(z)$ is a meromorphic function of order ϱ, $P(z)$ is also of order ϱ, and $f_1(z)$ is of order less than ϱ and of regular growth, then*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log S^*(r)}{n(r,\infty)}<\infty.$$

Now, we can justify the step (α) as follows:

If $M_2(r)$ is the maximum modulus of $P(z)$, then [3]

$$\frac{\log m_2(r)}{\log M_2(r)}=\sigma(r),$$

and

$$\frac{\log M_1(r)}{\log M_2(r)}=\varphi(r)=O(r^\alpha),$$

$\alpha>0$, for $f_1(z)$ is of order greater than $P(z)$, and $M_1(r)=\max_{|z|=r}|f_1(z)|$, therefore,

$$\frac{\sigma(r)}{\varphi(r)}=O(r^{-\alpha})\to 0 \quad \text{as } r\to\infty.$$

Steps similar to this can be justified in the proofs of Theorem I (ii) and Theorem III (i) and (ii) in the same manner.

In the proof of Theorem II, I have assumed

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log m_2(r)}{r^{\varrho}} = 0.$$

Now, this follows easily if we note the following: Under the new set of conditions imposed on the theorem, we have [3]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log m_2(r)}{\log M_2(r)} = k,$$

where k is a constant, and [4]

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M_2(r)}{r^{\varrho}} = 0,$$

if the genus of the canonical product $P(z)$ is $\varrho - 1$.

References

[1] Bose, S. K.: Math. Z. **56**, 223—226 (1952). — [2] Shah, S. M., and S. K. Singh: Mathematics Student **22**, 121—128 (1954). — [3] Hayman, W. K.: Proc. London Math. Soc. **2**, 469—512 (1952). — [4] Valiron, G.: Theory of Integral Functions, p. 56. 1923.

Lucknow (India), Department of Mathematics, Lucknow University

(Eingegangen am 21. Dezember 1954)

Lomnicki, Z. A., and S. K. Zaremba
Math. Zeitschr. Bd. 66, S. 490—494 (1957)

A further instance of the Central Limit Theorem for dependent random variables

By

Z. A. Lomnicki and S. K. Zaremba

The principal extension of the Central Limit Theorem to dependent variables obtained so far applies to systems of random variables which have been called m-dependent (cf. [1], [2], [6]). The present note is an attempt at a generalization going in a slightly different direction, and is based on a completely different method. The case treated here solves, in particular, a problem of Mathematical Statistics, and it is hoped that the device introduced in the proof of Proposition 2 may be helpful in proving other theorems of a similar character.

Proposition 1. Let $\xi_{i,k}$ $(i=1, 2, \ldots; k=i+1, i+2, \ldots)$ be random variables subject to the following conditions:

(i) If any two finite sets of variables $\xi_{i,k}$ have the property that no value taken by either index of any element of one set appears among the values of the indices of the elements of the other set, then these two sets are mutually independent;

(ii) $E(\xi_{i,k})=0$ and $E(\xi_{i,k}^2)=\mu_2$ $(i=1, 2, \ldots; k=i+1, i+2, \ldots)$, μ_2 being a constant;

(iii) $E(\xi_{i,k}\,\xi_{i,j}) = E(\xi_{i,j}\,\xi_{k,j}) = c$ $(i=1, 2, \ldots;\ k=i+1, i+2, \ldots;\ j=k+1, k+2, \ldots)$, c being, again, a constant;

(iv) The random variables $\xi_{i,k}$ have collectively bounded moments up to some order m.

Furthermore, let

$$\bar{\xi}_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \xi_{i,k}.$$

Then assuming $n \leq m$,

$$\lim_{N\to\infty} N^{n/2} E(\bar{\xi}_N^n) = \begin{cases} 2^{n/2} \cdot n!\, c^{n/2}/(n/2)! & \text{when } n \text{ is even;} \\ 0 & \text{when } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{1}$$

Proof. It is convenient to make $\xi_{i,i}=0$ and $\xi_{i,k}=\xi_{k,i}$ for any i and k. Then

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,k=1}^{N} \xi_{i,k},$$

and

$$N^{n/2}\bar{\xi}_N^n = \frac{1}{N^{n/2}(N-1)^n} \sum_{i(1),\ldots,i(n)=1}^{N} \sum_{k(1),\ldots,k(n)=1}^{N} \prod_{\nu=1}^{n} \xi_{i(\nu),k(\nu)}. \tag{2}$$

We can attempt to decompose each term of this multiple sum into as many independent factors as possible, and it is easy to see that the number of different values of the indices in any of these factors cannot exceed its degree in the ξ's by more than 1. Hence, if a term of (2) is decomposed into γ independent factors, it contains at most $n+\gamma$ different values of the indices. Therefore, the number of terms which cannot be decomposed into more than γ factors is $O(N^{n+\gamma})$, and since the expectations of these terms have a common upper and lower bound according to (iv), their total contribution to $N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n)$ is $O(N^{\gamma-n/2})$.

But whenever a term contains an independent factor composed of one ξ only, its expectation is 0 according to (ii). Thus only terms with $\gamma \leqq n/2$ need to be considered. If n is odd, this entails $\gamma \leqq (n-1)/2$, so that the whole sum is $O(N^{-\frac{1}{2}})$, which shows that the proposition holds when n is odd.

If n is even, the total contribution of all the terms with $\gamma < n/2$ is $O(N^{-1})$. Among the factors of the terms with $\gamma = n/2$, those which are squares of ξ's contain only two different values of the indices each, so that the number of terms containing squares is $O(N^{3n/2-1})$, and their total contribution to $N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n)$ is again $O(N^{-1})$.

Finally, we are left with products whose $n/2$ independent factors are each a product of two ξ's with exactly one index value in common. But, clearly, there are $n!/[(n/2)!\,2^{n/2}]$ ways of grouping n ξ's into $n/2$ pairs, while in each pair there can be 4 combined positions of the common index value. Thus the number of possible patterns of identification of the indices in the terms under consideration is

$$\frac{4^{n/2}\cdot n!}{(n/2)!\,2^{n/2}} = \frac{2^{n/2}\cdot n!}{(n/2)!}.$$

To any of these patterns there correspond $N^{[3n/2]}$ systems of values of the indices, and since the expectation of any of the terms under consideration is $c^{n/2}$, we find, in view of what was said of the other types of term in (2),

$$N^{n/2}E(\bar{\xi}_N^n) = \frac{N^{[3n/2]}}{N^{n/2}(N-1)^n} \cdot \frac{2^{n/2}\cdot n!\,c^{n/2}}{(n/2)!} + O(N^{-1})$$

when n is even. Hence the proposition holds in both cases.

Proposition 2. Under the assumptions (i), (ii) and (iii) of Proposition 1, if, moreover, the probability integrals representing $E(\xi_{i,k}^2)$ converge uniformly with respect to i and k, the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tends to a normal distribution with a zero mean and a variance $4c$.

Proof. If $\{\xi_{i,k}\}$ have collectively bounded moments of every order, this is an immediate consequence of the fact that, according to (1), all the moments of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tend, with $N\to\infty$, to those of the normal distribution specified above (cf. e.g. [8], [3]). The general case can be dealt with by means of the following device: Make

$$u_{i,k,N} = \begin{cases} \xi_{i,k} & \text{if } |\xi_{i,k}| \leq \log N; \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

and define $\eta_{i,k,N}$ and $\zeta_{i,k,N}$ by

$$\begin{cases} \eta_{i,k,N} = u_{i,k,N} - E(u_{i,k,N}); \\ \zeta_{i,k,N} = \xi_{i,k} - \eta_{i,k,N}. \end{cases} \tag{3}$$

According to these definitions, clearly

$$E(\eta_{i,k,N}) = E(\zeta_{i,k,N}) = 0 \qquad (N, i = 1, 2, \ldots; k = i+1, i+2, \ldots). \tag{4}$$

Moreover, as a result of the additional assumption introduced in Proposition 2,

$$\lim_{N\to\infty} E(\eta_{i,k,N}^2) = \mu_2 \quad \text{and} \quad \lim_{N\to\infty} E(\zeta_{i,k,N}^2) = 0, \tag{5}$$

both uniformly in i and k. In view of

$$E(\eta_{i,k,N}\eta_{i,j,N}) = E(\xi_{i,k}\xi_{i,j}) - E(\xi_{i,k}\zeta_{i,j,N}) - E(\zeta_{i,k,N}\xi_{i,j}) + E(\zeta_{i,k,N}\zeta_{i,j,N}),$$

and owing to the Schwarz Inequality, it follows that

$$\lim_{N\to\infty} E(\eta_{i,k,N}\eta_{i,j,N}) = c \quad \text{uniformly in} \quad i,j,k \quad \text{for} \quad k,j > i;\ k \neq j. \tag{6}$$

Finally, it should be noted that, for any given N, each of the two sets of random variables $\{\eta_{i,k,N}\}$ and $\{\zeta_{i,k,N}\}$ has the properties of independence corresponding to (i).

If

$$\bar{\eta}_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \eta_{i,k,N} \quad \text{and} \quad \bar{\zeta}_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} \zeta_{i,k,N},$$

we have

$$N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N = N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N + N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N, \tag{7}$$

and $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$ has finite moments of every order. These moments can be computed in the same way as those of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ in the proof of Proposition 1, the main difference being that the higher moments of $\eta_{i,k,N}$ are no longer independent of N. However, clearly,

$$|E(\eta^n_{i,k,N})| \leq (2\log N)^n$$

for any i, k, N, and n, so that the terms which previously were $O(N^{-\frac{1}{2}})$ and $O(N^{-1})$ are now $O[(\log N)^n N^{-\frac{1}{2}}]$ and $O[(\log N)^n N^{-1}]$ respectively, and, therefore, still tend to 0 with $N \to \infty$. In the main parts of the even moments, the expectation of each term, while not exactly equal to $c^{n/2}$, tends uniformly to this value, owing to (6). Thus (1) still holds for every n if, in the left-hand side, $\bar{\eta}_N$ is substituted for $\bar{\xi}_N$. Hence the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$ tends to the required normal distribution when $N \to \infty$.

But var $N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N$ can be computed in the same way as var $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$, the only difference being that, for the terms whose expectation was c, we have to substitute terms whose expectation tends uniformly to 0 according to (5). Consequently,

$$\lim_{N\to\infty} N E(\bar{\zeta}^2_N) = 0,$$

so that

$$\mathrm{p}\lim_{N\to\infty} N^{\frac{1}{2}}\bar{\zeta}_N = 0.$$

Owing to (7), and according to a theorem given by CRAMÉR ([1]; cf. Section 20.6), it follows that the distribution of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\xi}_N$ tends to the same limit as that of $N^{\frac{1}{2}}\bar{\eta}_N$. Hence the proof is complete.

Given a random sample $x_1, \ldots, x_N$ of a population, the expression

$$g_N = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} |x_i - x_k|$$

is known as GINI's mean difference. If we make

$$|x_i - x_k| - E(|x_i - x_k|) = \xi_{i,k},$$

we have $g_N - E(g_N) = \bar{\xi}_N$, and if the x's have finite second moments, the conditions of Proposition 2 are obviously satisfied, so that g_N is asymptotically normally distributed. For the values of $E(g_N)$ and var g_N see [7], simplified in [5].

The authors are very grateful to Mr. J. D. NORTH, Chairman and Managing Director of their firm, for creating an atmosphere in which this kind of work was possible, and for giving his permission to publish the present note.

References

[1] Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton: University Press 1946. — [2] Diananda, P. H.: Some probability limit theorems with statistical applications. Proc. Cambridge Philos. Soc. **49**, 239—246 (1953). — [3] Fréchet, M., and J. Shohat: A proof of the generalized second-limit theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 533—543 (1931). — [4] Hoeffding, W., and H. Robbins: The central limit theorem for dependent variables. Duke Math. J. **15**, 773—780 (1948). — [5] Lomnicki, Z. A.: The standard error of Gini's mean difference. Ann. of Math. Statist. **23**, 635—637 (1952). — [6] Marsaglia, G.: Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 987—991 (1954). — [7] Nair, U. S.: The standard error of Gini's mean difference. Biometrika **28**, 428—436 (1936). — [8] Uspensky, J. V.: Introduction to Mathematical Probability. New York and London: McGraw-Hill 1937.

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Eingegangen am 28. September 1956)

WIR SUCHEN ZU KAUFEN

Annalen der Physik, 4. Folge, Band 49, 68, 79; 5. Folge, Band 2, 26, 31, 35, 39, 40, 43 und komplett; 6. Folge, Band 1, 11 Heft 1

Astrophysical Journal, Band 14, 23, 44 Heft 1 und 3

Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Band 1—12, 25

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, komplett

Helvetica Physica Acta, Band 7 Supplement 2

Journal de Physique et le Radium, Serie VII, Register zu Band 9; Serie VIII, Band 6, 8—10, Register zu Band 4

Journal de Chimie-Physique, Band 42 Heft 10—12

Mathematische Annalen, komplett

Mathematische Zeitschrift, komplett

Physica, Neue Folge, Band 1—12, 14

Physical Reviews, Band 59, 60—62, 64, 76

Zeitschrift für physikalische Chemie, Abt. A: Band 4, 10—25, 58—60, 80 94, 127—130, 146—186, 188, 189
Abt. B: Band 21—23, 25—35, 37, 38, 40—42

Zeitschrift für Astrophysik, Band 1—23, auch einzeln

Zeitschrift für Physik, Band 32, 53, 59—123 Heft 1/2 und komplett

Zeitschrift für technische Physik, Band 1 und 24

Zentralblatt für Geophysik, Band 5, 6, 11 Heft 1

Handbuch der Physik (Geiger-Scheel) komplett und Band 4, 6—9, 14—16, 20, 24 Heft 1

Angebote möglichst mit Preisangaben erbeten an:

LANGE & SPRINGER

Wissenschaftliche Buchhandlung

BERLIN W 35

Reichpietschufer 20, Tel. 249251

Die Mechanisierung des Weltbildes

Von Dr. **E. J. Dijksterhuis**, a. o. Professor für Wissenschaftsgeschichte an den Universitäten zu Leiden und Utrecht, Bilthoven/Holland. Ins Deutsche übertragen von Helga Habicht, Heidelberg. Mit 47 Abbildungen. VII, 594 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 36.—

Unter den vielen Veränderungen, die das wissenschaftliche Denken über die Natur im Laufe der Jahrhunderte erfahren hat, läßt sich kaum eine aufweisen, deren Wirkung in die Tiefe so stark und in die Breite so mannigfaltig war wie die Entstehung und Entwicklung der Betrachtungsweise, die man die mechanische, die mechanistische oder die mechanizistische zu nennen pflegt.

Erstens hat sie zu den Untersuchungs- und Behandlungsmethoden geführt, welche die Physik — und darunter verstehen wir in Abweichung vom üblichen Sprachgebrauch die gesamte Wissenschaft der leblosen Natur, also außer Physik im engeren Sinne auch Chemie und Astronomie — später zu jener Hochblüte gebracht hat, deren Früchte wir heute ernten; es sind dies das Experiment als Erkenntnisquelle, die mathematische Formulierung als Beschreibungsmittel, die mathematische Deduktion als Wegweiser zu neuen, durch Experimente kontrollierbaren Erscheinungen. Zweitens waren es ihre Erfolge, welche die Entwicklung der Technik ermöglichten und welche dadurch die weitgehende Industrialisierung auslösten, die längst zu einer Existenzgrundlage der Menschheit geworden ist. Und schließlich fanden ihre Ideen Eingang in das philosophische Denken über den Menschen und seinen Platz in der Welt und in eine Reihe von Fachwissenschaften, die anfänglich außerhalb jeden Kontaktes mit dem Studium der Natur zu stehen schienen. Durch das alles ist die Mechanisierung der Physik viel mehr als eine interne methodische Angelegenheit der Naturwissenschaft geworden; sie geht die Kulturgeschichte als Ganzes an und verdient daher auch außerhalb des Kreises der Naturforscher Aufmerksamkeit.

Dieses Werk ist kein Handbuch für Wissenschaftshistoriker, sondern es wird an einen Leser mit allgemeinem Interesse gedacht, bei dem keinerlei mathematische oder physikalische Schulung vorausgesetzt wird. Ein solcher wird mehr Nutzen von einer Übersicht haben, welche die großen Züge festhält, als von einer Behandlung, die auf alle Details eingeht. Daher wird der Anteil, den die griechische Kultur am Zustandekommen der Naturforschung gehabt hat, nur in der perspektivischen Verkürzung der Vergangenheit behandelt. Der Verfasser verfolgt das griechische Denken nicht in seiner eigenen historischen Entwicklung, sondern fragt nach dem geistigen Erbgut, das Hellas Europa hinterließ, und nach der Richtung, die es dem europäischen Denken wies.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany